Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 4. Métodos de la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

5 de septiembre de 2023

tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

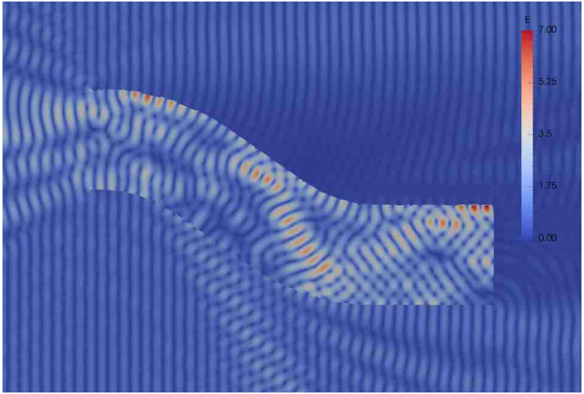


Figura: Simulación de cavidad *cobra* cuando un frente de onda plano choca con este. La solución genera ecuaciones armónicas variables en el tiempo. Escala de color representa E (`freefem++`).

Pendiente de clase anterior: separación de variables en coord. esféricas

- Coordenadas esféricas, como sabemos el Laplaciano es:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \tag{1}$$

- Si asumimos que un problema posee simetría azimutal, i.e., V es independiente de la coordenadas ϕ

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{2}$$

- Ahora asumimos una solución del tipo y evaluamos en $\nabla^2 V$

$$V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{4}$$

Pendiente de clase anterior: separación de variables en coord. esféricas

- Usamos el mismo concepto, ambas ecuaciones deben ser constantes:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = l\left(l+1\right), \quad \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l\left(l+1\right) \tag{5}$$

- Donde agregamos una forma conveniente de expresar la constante, ahora con dos ODE, resolvemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = l\left(l+1\right)R, \qquad \Rightarrow R\left(r\right) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l\left(l+1\right)\Theta\sin\theta, \qquad \Rightarrow \Theta\left(\theta\right) = P_l\left(\cos\theta\right) \tag{7}$$

- Con $P_l\left(x\right)$ polinomios de Legendre, se describen mediante la fórmula de Rodrigues[1]:

$$\boxed{P_l\left(x\right) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\left(x^2-1\right)^l} \tag{8}$$

[1] Francés y no latino.

Polinomios de Legendre

- La fórmula de Rodrigues solo funciona para $l \in \mathbb{Z}_0^+$

$$P_l\left(x\right) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\left(x^2 - 1\right)^l \tag{9}$$

$$P_0\left(x\right) = 1 \tag{10}$$

$$P_1\left(x\right) = x \tag{11}$$

$$P_2\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \tag{12}$$

$$P_3\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \tag{13}$$

$$P_4\left(x\right) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right) \tag{14}$$

$$P_5\left(x\right) = \frac{1}{8}\left(65x^5 - 70x^3 + 15x\right) \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Polinomios de Legendre

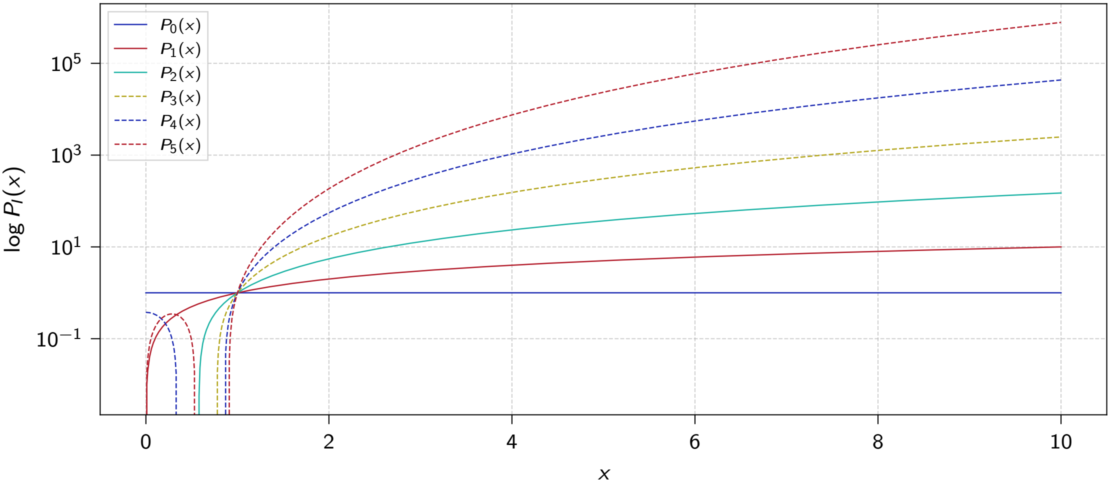


Figura: Polinomios de Legendre.

Separación de variables en coordenadas esféricas

- Para el caso particular nuestro (físico), la solución ecuación (7) va a $\to \infty$ en los casos de $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, por ejemplo la segunda solución para $l = 0$ es

$$\Theta(\theta) = \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

- Entonces tenemos que la solución a la ecuación de Laplace (con simetría azimutal) es

$$V(r,\theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta) \tag{17}$$

- Nuevamente eso conforma un set de soluciones donde debemos encontrar las constantes A y B, que por supuesto también dependerán de las condiciones de frontera, luego la solución más general corresponde a:

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)} \tag{18}$$

Método de los momentos

- El método resuelve la ecuación de Poisson mediante una aproximación numérica de la solución integral
- Empezamos asumiendo una función del tipo

$$\rho\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\rho_i\left(x,y,z\right) \tag{19}$$

- Con α_i constantes a ser determinadas y ρ_i funciones preseleccionadas
- Como sabemos, si poseemos la densidad de carga entonces podemos calcular rápidamente el potencial a través de

$$V\left(\mathbf{r}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{1}{s}\rho\left(\mathbf{r}'\right)\mathrm{d}\tau' \tag{20}$$

- Podemos entonces describir esta ecuación en términos de ρ_i y la nueva variable K_{ij},

$$V_j\left(\mathbf{r}_j\right)=V\left(x_j,y_j,z_j\right)=\sum_{i=1}^{N}K_{ij}\alpha_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i}{4\pi\epsilon}\int\frac{\rho_i\left(x',y',z'\right)}{s_{ij}}\mathrm{d}\tau',\quad K_{ij}\equiv\frac{1}{4\pi\epsilon}\int\frac{\rho_i\left(x',y',z'\right)}{s_{ij}}\mathrm{d}\tau'$$

Método de los momentos

- Con V_j el potencial de solo una porción o parche, entonces expandiendo tenemos que:

$$V_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_i \left(x', y', z'\right)}{s_{ij}} \, \mathrm{d}\tau' \right) \tag{21}$$

- Con lo que tenemos un sistema de ecuaciones lineal de N ecuaciones con N incógnitas
- El método requiere de una buena elección de la densidad de carga ρ_i la cual también debe cumplir con condiciones de borde
- El método es limitado, ya que necesitamos una distribución de carga, que, po lo general puede ser aproximada tomando la diferencia de potenciales vecinos (ver siguiente método FDM)

$$\begin{aligned} V_1 &= K_{11}\alpha_1 + K_{12}\alpha_2 + \cdots + K_{1N}\alpha_N \\ V_2 &= K_{21}\alpha_1 + K_{22}\alpha_2 + \cdots + K_{2N}\alpha_N \\ &\vdots \\ V_N &= K_{N1}\alpha_1 + K_{N2}\alpha_2 + \cdots + K_{NN}\alpha_N \end{aligned}$$

Método de los momentos

- El clásico problema usando el método de los momentos es el cálculo de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, i.e., $C = \epsilon A/d$
- Inicialmente dábamos una carga uniforme a cada una de las placas, pero ahora podemos generalizar esto haciendo que la carga Q varíe de punto a punto
- Imaginemos un área pequeña dentro de una de las placas, $\mathcal{S}$, entonces

$$Q = \int_{\mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} \, \mathrm{d}a \tag{22}$$

- Luego debido a la simetría del sistema $C = Q/2V$, luego podemos aproximar a:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \Delta a_i \tag{23}$$

- Como sabemos que el potencial para cada una de las placas debe cumplir con ecuación (21)

Método de los momentos

- Entonces como usamos simetría de las placas se tiene que:

$$V_1 = \ldots = V_n = +V, \qquad V_{n+1} = \ldots = V_{2n} = -V \tag{24}$$

- Luego podemos escribir todo en términos de una matriz

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1(2n)} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2(2n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{n(2n)} \\ K_{(n+1)1} & K_{(n+1)2} & \ldots & K_{(n+1)(2n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{(2n)1} & K_{(2n)2} & \ldots & K_{(2n)(2n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +V \\ +V \\ \vdots \\ +V \\ -V \\ \vdots \\ -V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ \vdots \\ +1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} V \tag{25}$$

Diferencias finitas

- Transformamos una PDE (o ODE) a un sistema lineal de ecuaciones
- Cuerpo continuo a una distribución discreta de elementos donde sus elementos son calculables por una simple interpolación
- Diferencias finitas es un método numérico para resolver el problem de Poisson conociendo el potencial en la frontera
- Usando ciertas condiciones también puede aplicarse cuando se conoce **E** en la frontera
- Para este método solo usaremos coordenadas cartesianas (aunque también es posible realizarlo en otras)
- Pasos del método:
  1. **Dividir la región en una malla discreta**: Cada elemento puede ser rectangular, pero los cálculos se facilitan si cada elemento es cuadrado y de lado h
  2. **Calcular el valor del potencial en cada node de la malla usando la ecuación de Poisson o Laplace y el valor del potencial en los puntos cercanos**

Creando una malla

- Diferencias de los dos métodos clásicos: *Finite Difference Method* (FDM) y *Finite Element Method* (FEM; mecánica de materiales, transferencia de calor, etc)
  - La PDE es aproximada a una diferencia finita (i.e., diferencia entre dos valores de potencial V) y no asi por una interpolación de funciones (caso de FEM)
  - El dominio de una región es representado po un numero finito de nodos con un valor de muestra (en vez de un numero finito de interpolaciones)
- Pasos para generar FDM:
  1. Discretización o subdivisión del dominio de un cuerpo
  2. Selección de la función de diferencias finitas (que para nuestro caso es el potencial) para dar una aproximación a las derivadas en un punto desconocido (nodo)
  3. Formular un sistema lineal de ecuaciones para cada nodo
  4. Resolución del sistema de ecuaciones para cada nodo

Creando una malla

- Mallas pueden ser regulares o irregulares
- La densidad del mallado dependerá del tipo de aplicación que realicemos (i.e., una mayor densidad en un punto de interés del material)

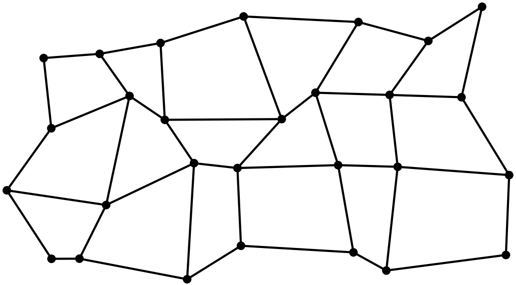


Figura: Malla irregular de material. Puntos negros representan los nodos y polígonos de cuatro son llamados elementos. El sistema total es llamado mallado (o *mesh-grid*).

El principio matemático

- Como construir el metodo data una PDE or ODE
- Queremos entonces aproximar la pendiente de una curva en cierto punto P, para eso podemos usar lo siguiente: *fordward-difference*, *backward-difference*, *central-difference*, o incluso segundas derivadas,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{26}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \tag{27}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{28}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{29}$$

- Cualquier aproximación de este tipo es llamada **diferencia finita**
- Un caso más general es usando expansión de Taylor

El principio matemático

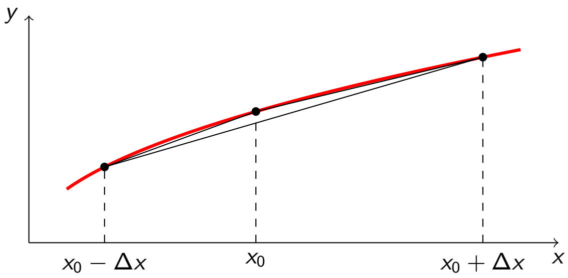


Figura: Estimando la derivada de $y = f(x)$ en un punto P usando *fordwards*, *backwards* y diferencia centrales.

El principio matemático

- Expandiendo en torno a x_0

$$f\left(x_0+\Delta x\right)=f\left(x_0\right)+\Delta x f'\left(x_0\right)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\right)^2 f''\left(x_0\right)+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\right)^3 f'''\left(x\right)+\ldots \tag{30}$$

$$f\left(x_0-\Delta x\right)=f\left(x_0\right)-\Delta x f'\left(x_0\right)+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\right)^2 f''\left(x_0\right)-\frac{1}{3!}\left(\Delta x\right)^3 f'''\left(x\right)+\ldots \tag{31}$$

- Sumando ambas expansiones ecuaciones (30) y (31),

$$f\left(x_0+\Delta x\right)+f\left(x_0-\Delta x\right)=2f\left(x_0\right)+\left(\Delta x\right)^2 f''\left(x_0\right)+\mathcal{O}\left(\Delta x\right)^4 \tag{32}$$

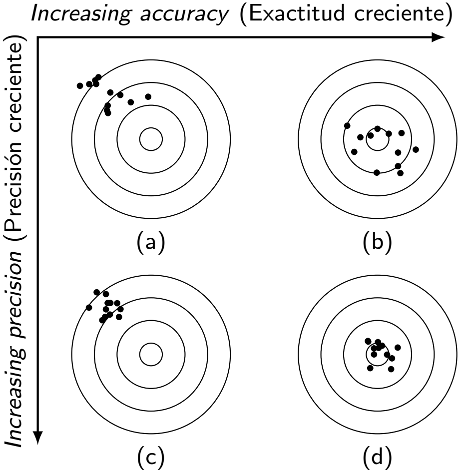
- Con $\mathcal{O}\left(\Delta x\right)^4$ el error que hemos agregado en la serie al momento de truncar su valor
- Luego podemos obtener que (asumiendo $\mathcal{O}\left(\Delta x\right)^4 \approx 0$):

$$f''\left(x_0\right)\approx\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-2f\left(x_0\right)+f\left(x_0-\Delta x\right)\right] \tag{33}$$

- Lo que corresponde a la ecuación (29)

El principio matemático

Figura: Precisión y exactitud. Posibles casos (a) baja precisión y baja exactitud, (b) alta exactitud y baja precisión, (c) baja exactitud y alta precisión, (d) alta precisión y alta exactitud.



Desarrollo del método (un solo material)

- Primero calculamos las derivadas numéricas del potencial respecto a las coordenadas x en el punto medio a

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a} \approx \left.\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|_{x=a} = \frac{V_0 - V_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{h}(V_0 - V_1) \tag{34}$$

- Similarmente calculamos en c:
$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=c} \approx \frac{1}{h}(V_3 - V_0)$$
- Con los valores en a y c, podemos entonces calcular la segunda derivada en el punto $x = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=0} \approx \frac{1}{h^2}\left[(V_3 - V_0) - (V_0 - V_1)\right] \tag{35}$$

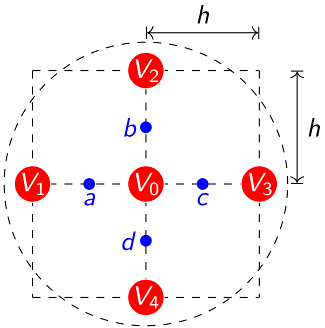


Figura: Cálculo de potencial en cada punto de la malla usando valores de puntos cercanos. Los puntos a, b, c, d son puntos medios entre los valores conocidos de potencial V_i, con $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Desarrolo del método (un solo material)

- Eso en la dirección x, en y repetimos la misma mecánica

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{y=0} \approx \frac{1}{h^2}\left[(V_4 - V_0) - (V_0 - V_2)\right] \tag{36}$$

- Luego en el caso de la ecuación de Laplace, el valor de V_0 es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0\right) = 0 \tag{37}$$

$$\boxed{V_0 \approx \frac{1}{4}\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)} \tag{38}$$

- Obviamente la solución varía con el tipo de malla utilizada, pero la solución esta dentro de cierta tolerancia
- El tamaño de la malla puede variar a través del espacio modelado
- ecuación (38) es llamada: ecuación *five-point equal arm difference*
- Si las dimensiones de h son distintas en x, y entonces la solución depende del elemento elegido

Desarrolo del método (entre dos dieléctricos)

- A través de la línea punteada tomamos la ley de Gauss para materiales (i):

$$\oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{39}$$

- Y es cero ya que no existe carga encerrada, luego $E = -\nabla V$,

$$\oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \epsilon \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \oint \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \, dl \tag{40}$$

$$= \oint \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \, dl \tag{41}$$

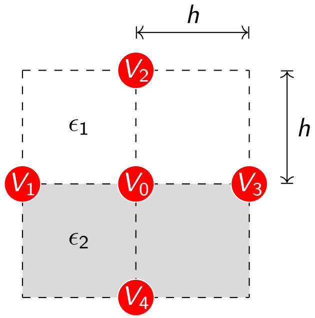


Figura: Cálculo de potencial en cada punto de la malla usando valores de puntos cercanos. Los puntos a, b, c, d son puntos medios entre los valores conocidos de potencial V_i, con $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Desarrolo del método (entre dos dieléctricos)

- Continuando:

$$\oint \epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \, \mathrm{d}l = \frac{V_1 - V_0}{h}\left(\epsilon_1 \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{h}{2}\right) + \frac{V_2 - V_0}{h}\epsilon_1 h + \frac{V_3 - V_0}{h}\left(\epsilon_1 \frac{h}{2} + \epsilon_2 \frac{h}{2}\right) + \frac{V_4 - V_0}{h}\epsilon_2 h \quad (42)$$

- Desarrollando:

$$\epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 V_2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) V_3 + \epsilon_2 V_4 - 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) V_0 \approx 0 \quad (43)$$

$$\Rightarrow V_0 \approx \frac{1}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\left[\epsilon_1 V_1 + \epsilon_1 V_2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) V_3 + \epsilon_2 V_4\right] \quad (44)$$

Ejemplo de malla

- Resolvemos el problema de la ecuación de Laplace usando ecuación (38)
- Para esto usamos los valores en la frontera, valores conocidos inicialmente
- En este caso iremos de izquierda a derecha y de arriba a abajo
- El orden es arbitrario y el numero de elementos nos da una mejor precisión

Exactitud y estabilidad de la solución FDM

- Existen tres tipos de errores en el análisis numérico de FDM, de los cuales no nos podemos deshacer, estos son:
  1. Error de modelado
  2. Error de discretización
  3. Error de redondeos
- Cada uno de estos errores afectará la exactitud del problema, y por ende, degradarán la solución

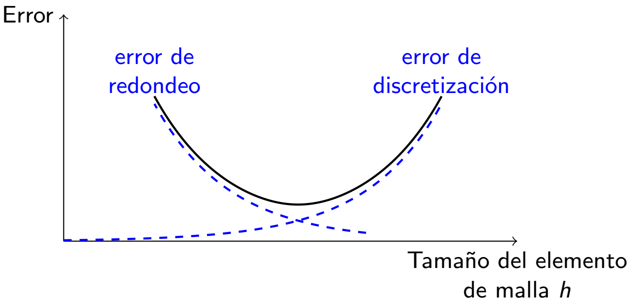


Figura: Error total en función de tamaño de elemento h.

Malla más compleja

Ejercicio

Considere una región rectangular como se muestra en la Figura. Utilice FDM para determinar el potencial y su distribución dentro de la región.

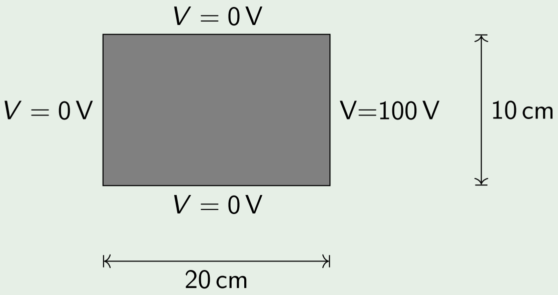
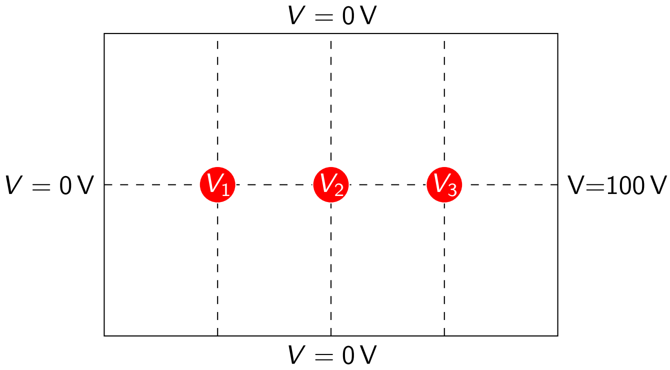


Figura: Geometría rectangular y condiciones de frontera para el potencial eléctrico.

Malla más compleja

- El potencial debe satisfacer en cualquier punto de la región la ecuación de Laplace
- Utilizaremos un $h = 5\,\text{cm}$, i.e., 8 elementos y una malla de 2×4



Malla más compleja

- Reemplazamos en la ecuación (38) para cada uno de los nodos 1, 2 y 3
- Al realizar esta operación podemos escribirla en forma matricial:

$$\begin{aligned} 4V_1 - V_2 &= 0 && (45)\\ V_1 - 4V_2 + V_3 &= 0 && (46)\\ V_2 - 4V_3 &= -100 && (47)\\ & && (48) \end{aligned}$$

- Es decir:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{V} = \mathbf{B} \tag{50}$$

- Con $[\mathbf{A}]$ una matriz y $\mathbf{V}, \mathbf{B}$ vectores
- Lo que se ha transformado en un problema de álgebra lineal y el cual existen múltiples métodos para resolverlo (i.e., valore propios), $\mathbf{V} = [\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}$

Malla más compleja

- Entonces resolviendo el sistema encontramos que:

$$V_1 = 1{,}79\,\mathrm{V}, \qquad V_2 = 7{,}14\,\mathrm{V}, \qquad V_3 = 26{,}79\,\mathrm{V} \tag{51}$$

- Notese que con este resultado el problema no es para nada exacto, y solo reduciendo el tamano de la malla podemos mejorarlo
- Reduciendo a $h = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ generamos 21 elementos!

Cuadro: Comparación en el nivel de error δ del calculo de FDM. Se analizaron tres muestras de potencial V_9, V_{11}, y V_{13}, (donde si no existe en la malla de menor resolución se usa el nodo mas cercano).

	FDM $h = 5\,\mathrm{cm}$	$\delta(h = 5\,\mathrm{cm})$	FDM $h = 2{,}5\,\mathrm{cm}$	$\delta(h = 2{,}5\,\mathrm{cm})$	Resultado analítico
V_9	1,786 V	63 %	1,289 V	17,8 %	1,094 V
V_{11}	7,143 V	30 %	6,019 V	9,7 %	5,489 V
V_{13}	26,786 V	2,7 %	26,289 V	0,75 %	26,094 V

Malla más compleja

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \\ V_{14} \\ V_{15} \\ V_{16} \\ V_{17} \\ V_{18} \\ V_{19} \\ V_{20} \\ V_{21}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100
\end{bmatrix}
$$

El método y más allá

Ejercicio

Una región rectangular de 6 m $\times$ 8 m el potencial es exactamente igual a cero en sus cuatro fronteras. La distribución de carga, sin embargo, está dada por $\rho = 2\epsilon_0$. Entonces, resuelva numéricamente la ecuación de Poisson y determine la distribución del potencial en la región rectangular.
Hint: similar a los casos anteriores pero ahora debemos modificar la ecuación (38),

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -2. \tag{52}$$

- Sea φ una función cualquiera que describa una variable física, entonces el método puede ser aplicado a unas serie de situaciones:
  - PDE de difusión: $k\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$
  - PDE Helmholtz: $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$
  - PDE ecuación de onda: $u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

El método y más allá

- La historia del método nace del análisis mecánico en particular para estudiar deformación y elasticidad de materiales → FEM[2]
- La malla no tiene porque ser regular, y más elementos en regiones importantes se realiza comúnmente
- El sistema transforma una PDE en un sistema de ecuaciones lineales, que puede resolverse fácilmente, i.e., un problema de álgebra lineal
- El método también se puede aplicar en electrodinámica, entonces agregamos otras condiciones de borde y nuestra ecuación se vuelve más compleja
- Software industriales usan este método todo el tiempo, donde también es posible agregar dependencia del material y composición
- Existen muchos software libres para esto:
  - `Gmsh`: *A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities* (Geuzaine & Remacle 2009)
  - `freefem++`: *A high level multiphysics finite element software* (Hecht 2012)
  - `luamesh`[3]: LaTeX extention to draw mesh grids

[2] Finite Element Method (Hughes 2012)
[3] https://plmlab.math.cnrs.fr/mchupin/luamesh

El método y más allá

- Ejemplos de otras aplicaciones: ecuación de Navier-Stokes (fluidos), ecuación de Fourier (conducción de calor)

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\left\{\mu\left[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^{\mathsf{T}}\right]-\frac{2}{3}\mu\left[\nabla\cdot\mathbf{u}\right]\mathbf{I}\right\}+\mathbf{F} \tag{53}$$

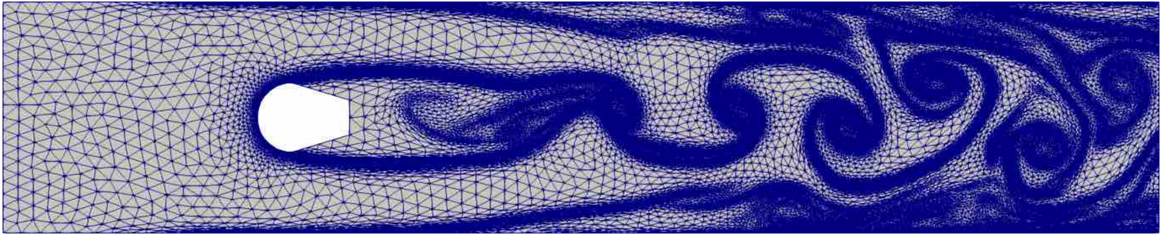
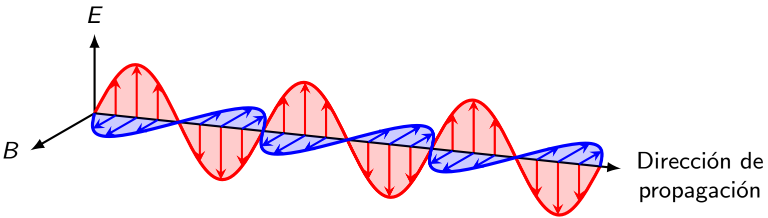


Figura: Ejemplo de malla aplicado en fluidos, donde podemos resolver la Ec.de Navier-Stokes. *Mesh adaptation* `freefem++`.

Resumen

- Cálculo vectorial $\rightarrow$ **Clase 0**
- Principios de teoría electromagnética (ecuaciones de Maxwell) $\rightarrow$ **Clase 1**
- Materiales, sus propiedades e importancia: Conductores $\rightarrow$ **Clase 2**
- Materiales, sus propiedades e importancia: Dieléctricos $\rightarrow$ **Clase 3**
- Materiales, sus propiedades e importancia: Materiales magnéticos $\rightarrow$ **Clase 4**
- Funciones potenciales $\rightarrow$ **Clase 5**
- Métodos de la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace $\rightarrow$ **Clase 6 y 7**
- Próxima clase: 2.1 ecuación de onda para campos eléctrico y magnético $\rightarrow$ **Clase 8**



Bibliografía

Geuzaine, C., & Remacle, J.-F. 2009, International journal for numerical methods in engineering, 79, 1309

Hecht, F. 2012, J. Numer. Math., 20, 251. https://freefem.org/

Hughes, T. J. 2012, The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis (Courier Corporation)