

Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 4. Métodos de la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

4 de septiembre de 2023

 tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

1 Introducción

- Por qué resolver las ecuaciones
- Ecuación de Laplace

2 Integración directa

- Problema en coordenadas cartesianas

3 Separación de variables

- Problema en coordenadas cartesianas
- Ejercicios

4 Método de las imágenes

- El problema clásico
- Otros ejemplos de imágenes

5 Resumen

6 Bibliografía



Figura: Pierre-Simon Laplace, 1749–1827. Su trabajo más simbólico fue la mecánica celeste (*Mécanique Céleste* 1799-1825), al aplicar geometría analítica a la solución de problemas astronómicos (Boyer & Merzbach 2011).

Introducción

- Por qué es importante resolver las ecs. de Poisson y Laplace
- Formula fundamental para la electrostática
- La ecuación de Poisson y en especial la de Laplace se repiten en muchas situaciones en física
- Las soluciones a la ecuación de Laplace son llamadas funciones armónicas
- Ecuación de Laplace en coordenadas curvilíneas:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = 0, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (1)$$

con g_{ij} el tensor métrico Euclidiano

- Ecuación utilizada en mecánica de fluidos, mecánica cuántica, teoría de la elasticidad, teoría de la gravitación, entre ellas
- En algunos libros el operador laplaceano es definido como:

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \text{div}(\text{grad}) \quad (2)$$

Ecuación de Laplace

- Una de las funciones más importantes de la electrostática es calcular \mathbf{E} , como sabemos esto es directo mediante la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3)$$

- Desafortunadamente esta ecuación es difícil de calcular, con la excepción de cargas puntuales simples, uso de geometría o ley de Gauss
- Una mejor estrategia es calcular el *potencial* V

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{s} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (4)$$

- Aún en estos casos ecuación (4) también puede ser compleja de calcular analíticamente
- Entonces es mejor calcular directamente la ecuación de Poisson o Laplace:

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad \text{ó} \quad \nabla^2 V = 0 \quad (5)$$

Ecuación de Laplace en una dimensión

- En particular el estudio de la ecuación de Laplace (sigue en coordenadas cartesianas):

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \text{funciones armónicas} \quad (6)$$

- Simplemente:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow V(x) = mx + b \quad (7)$$

- La solución es básica pero posee importantes conceptos:

- 1 $V(x)$ es la media de $V(x+a)$ y $V(x-a)$, $\forall a$

$$\langle V(x) \rangle = \frac{1}{2} [V(x+a) + V(x-a)] \quad (8)$$

- 2 La ecuación de Laplace **no** tolera *mínimos* y *máximos locales*, i.e., los valores extremos de V solo deben ocurrir a los extremos

- Gracias a esta propiedad del potencial podemos luego aproximar usando soluciones numéricas

Ecuación de Laplace en dos dimensiones

- Lo que ya no es una ecuación diferencial ordinaria (ODE), viz., PDE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

- En general, no contiene dos constantes, o por ejemplo alguna solución finita
- No es posible escribir una solución general
- Imaginemos una superficie sobre el plano-xy

- 1 El valor de V en un punto (x, y) es el promedio de lo que rodea al punto, si describimos un área circular:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{circulo}} V dl \quad (10)$$

- 2 V no posee mínimos ni máximos locales, por lo general la ecuación de Laplace tiende a elegir una función lo más simple posible consistente con las condiciones de frontera

Potencial en una esfera

Ejemplo

- Calculemos el potencial promedio sobre una esfera circular de radio R , originado por una carga q fuera de la esfera.
- Por facilidad ponemos la carga q en el punto $(0, 0, z)$, entonces su potencial será:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s} \quad \Rightarrow \quad s^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta$$

- Luego el potencial promedio es:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \right)^{-1} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \Bigg|_0^\pi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2zR} [(z + R) - (z - R)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \end{aligned}$$

Integración directa

- Si existe simetría en el problema es posible que las dimensiones se reduzcan a una sola, entonces el problema es posible resolverlo por integración directa

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x) = C_1x + C_2 \quad (11)$$

- Donde las constantes C_1 y C_2 son las llamadas condiciones de borde, por ejemplo:

$$V(x) \Big|_{x=0} = V_1, \quad V(x) \Big|_{x=b} = V_2 \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{b} (V_2 - V_1)x + V_1 \quad (12)$$

Separación de variables

- En esta sección analizaremos como resolver la ecuación de Laplace usando el método favorito en física de PDE, la **separación de variables**
- El método se aplica en circunstancias cuando se conoce V o σ en la frontera (condición inicial)
- Buscamos soluciones funciones las cuales son un producto de funciones, de las cuales cada una de ellas solo depende de una variable, i.e.,

$$V(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

- Con V , la solución a la ecuación de Laplace

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- Comencemos por un problema clásico y usando coordenadas cartesianas
- Dos placas metálicas, conectadas a tierra y paralelas en el plano- xy , una en $y = 0$ y otra a una distancia a , $y = a$, el sistema está cerrado de tal modo que un potencial de $V_0(y)$ se mantiene entre placas

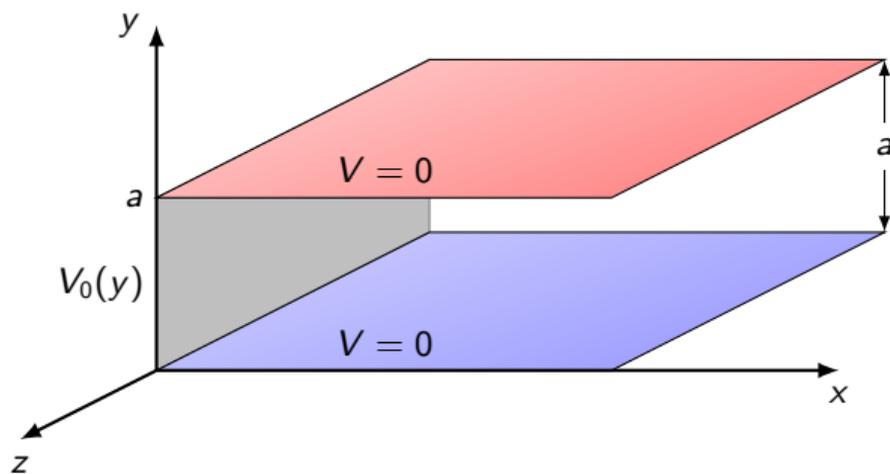


Figura: Configuración similar a capacitor, dos placas de metal paralelas al plano xz , una a $y = 0$ y otra en $y = a$. En $x = 0$ las placas están conectadas y cerradas con una tira infinita y aislada de las dos placas la cual mantiene un potencial específico de $V_0(y)$.

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- Para resolverlo sabemos que el problema solo depende de dos variables:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

- El cual está sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

- (i) $V(y = 0) = 0$
- (ii) $V(y = a) = 0$
- (iii) $V(x = 0) = V_0(y)$
- (iv) $V \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

- Ahora buscaremos solucionar la ecuación de Laplace con una solución del tipo:
 $V(x, y) = X(x) Y(y),$

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- Reemplazando la solución en la ecuación de Laplace:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (14)$$

- Luego *separamos las variables*:

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{g(y)} = 0 \quad (15)$$

- Hemos separado en dos funciones $f(x)$ y $g(y)$, con lo que implica que existe solo una posible solución: f y g *deben ser constantes*, luego

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_1, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2, \quad C_1 + C_2 = 0 \quad (16)$$

- Las ctes. pueden ser zero o una negativa o positiva

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- En la caso particular que una sea positiva y otra negativa

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y \quad (17)$$

- Con lo que convertimos una PDE en dos ODE, la solución natural para esto es:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky) \quad (18)$$

- Con lo que la solución tiene la forma:

$$V(x, y) = X(x) Y(y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx} \right) \left(C \sin(ky) + D \cos(ky) \right) \quad (19)$$

- Ahora que tenemos la solución aplicamos las condiciones (i) y (ii),

$$(i) \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x, y) = Ce^{-kx} \sin(ky) \quad (20)$$

$$(i) \quad ka = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

- Luego la solución a la ecuación usando método de separación de variables nos ha dado *infinitas* soluciones, pero ninguna de ellas resuelve el problema

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- Entonces tenemos muchas soluciones, pero ninguna satisface por completo
- La ecuación de Laplace es lineal, lo que quiere decir que si posee varias soluciones, la suma de ellas también es una solución, entonces

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \dots \quad (22)$$

- Entonces ahora podemos construir una solución más general,

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (23)$$

- Con esta ecuación ahora también cumplimos con (iv), para cumplir (iii) debemos elegir un correcto set de las constantes C_n ,

$$V(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y/a) = V_0(y) \quad (24)$$

- Con lo que llegamos convenientemente a una suma de Fourier

Separación de variables en coordenadas cartesianas

Teorema

Teorema de Dirichlet (Boas & Spector 1999). Cualquier función del tipo $V_0(y)$, la cual incluso puede poseer un número finito de discontinuidades, puede ser representada a través de una serie de Fourier.

- Luego sigue el *truco*¹ para poder determinar el set de constantes C_n
- Multiplicamos ecuación (24) por el término $\sin(n'\pi y/a)$, con $n' \in \mathbb{Z}^+$, e integramos de 0 hasta a

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \int_0^a V_0(y) \sin(n'\pi y/a) dy \quad (25)$$

- Trabajando la integral llegamos a:

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a) \sin(n'\pi y/a) dy = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n \\ \frac{a}{2}, & \text{si } n' = n \end{cases} \quad (26)$$

¹Llamado *Fourier's trick*, pero al parecer Euler usó un truco similar mucho antes.

Separación de variables en coordenadas cartesianas

- Por lo que la mayoría de las soluciones se van a cero ($n' \neq n$), entonces tenemos que:

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin(n\pi y/a) dy \quad (27)$$

- Luego la solución a la ecuación de Laplace está dada por las ecuaciones (23) y (27)
- En un caso más particular, supongamos ahora que en $x = 0$ la placa adquiere un potencial V_0 (recordar que es aislada de las placas a $y = 0$ y $y = a$),

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin(n\pi y/a) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (28)$$

- Evidentemente llegamos a la solución:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \quad (29)$$

Separación de variables y solución

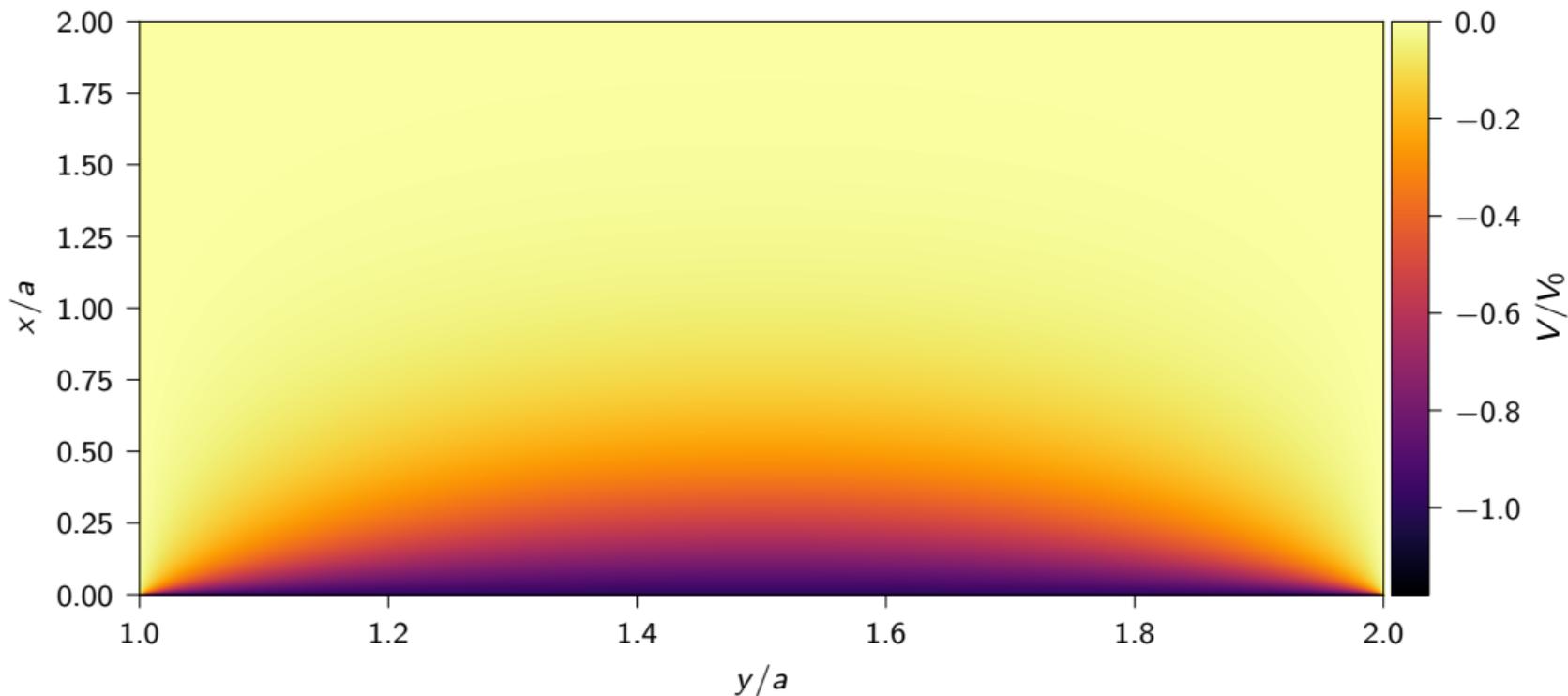


Figura: Representación de ecuación (29). Evaluando en $x/a = 500$, $y/a = 1000$ hasta $n = 499$.

Extra: Como graficar la función potencial $V(x, y)$

- Lo más complicado es definir $V(x, y)$ en ecuación (29), lo cual posee solo términos impares

```
1 import numpy as np
2 def potential(x, y, n_size):
3     n_list = np.linspace(0, n_size, n_size, endpoint=False, dtype=int)
4     # odd condition
5     n_list = n_list[n_list % 2 != 0].reshape(1, 1, -1)
6     V = 4 / np.pi * np.sum(
7         1 / n_list * np.exp(-n_list * np.pi * x[... , None]) * np.sin(n_list * np.pi * y[... ,
8             ↪ None]),
9         axis=-1
10    )
11    return V
12
13 x = np.linspace(0, 2, 500)
14 y = np.linspace(1, 2, 1000)
15 xx, yy = np.meshgrid(x, y)
16 V = potential(xx, yy, n_size=1000)
```

Extra: Como graficar la función potencial $V(x, y)$

- Nótese que hemos graficado las cantidades adimensionales x/a y y/a
- La suma es realizada en un eje adicional (razón por la cual ven el término None)
- Por ultimo para poder ver una malla de datos debemos genera cada punto del espacio, i.e., `np.meshgrid`
- Luego solo queda graficar

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 width, height = 6.02, 3.26 * .85
3 fig, ax = plt.subplots(figsize=(width, height))
4 im = ax.imshow(V.T, extent=[1, 2, 0, 2], cmap="inferno", rasterized=True)
5 plt.show()
```

Separación de variables y ejercicios

Ejercicios

- 1 Un tubo rectangular, alineado con el eje z (de $-\infty$ a ∞), posee tres lados conectados a tierra. En $y = 0$, $y = a$ y en $x = 0$. La cuarta cara, $x = b$, es mantenida a un potencial específico de $V_0(y)$. Entonces (a) desarrollar una fórmula general para el potencial dentro del tubo, y (b) Hallar el potencial explícitamente cuando $V_0(y) = V_0$.
- 2 El potencial $V_0(\theta)$ es dado para una esfera hueca de radio R . Hallar el potencial dentro de la esfera.

Método de las imágenes

- Suponga una carga q a una distancia d de un plano conductor infinito, entonces ¿Cuál es el potencial arriba del plano conductor ($z > 0$)?
- Esto no es simplemente $(4\pi\epsilon_0)^{-1} q/s$, ya que q inducirá una cierta carga negativa cerca de la superficie del conductor, i.e., el potencial es generado debido a q y a la carga inducida del conductor
- Entonces como es posible calcular el potencial, si no sabes como es la carga inducida en el conductor

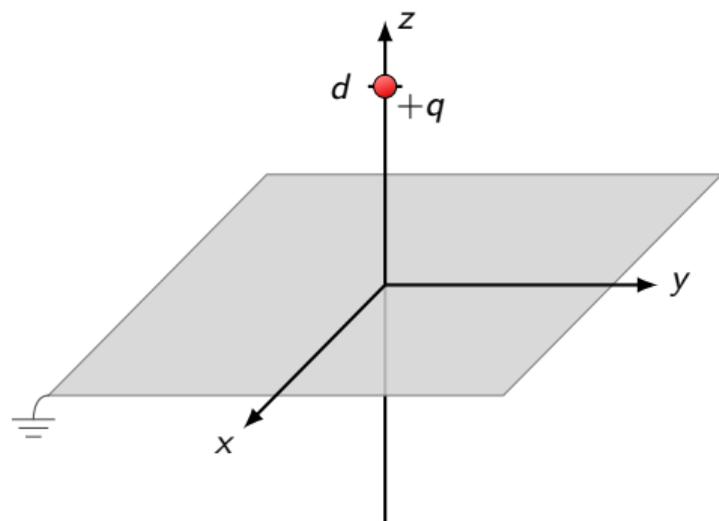


Figura: El problema clásico de imágenes, una carga sobre un plano conductor (conectado a suelo; *grounded*).

Método de las imágenes

- Matemáticamente es la ecuación de Poisson, $z > 0$ y con q en $(0, 0, d)$, la cual está sujeta a las siguientes condiciones de borde

$$V = 0 \quad \text{when} \quad z = 0 \quad (\text{ya que la placa conductora está conectada a tierra}) \quad (30)$$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{lejos de la carga} \quad x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2 \quad (31)$$

Teorema

Teorema de unicidad para la ecuación de Poisson. Para una gran cantidad de condiciones en la frontera, la ecuación puede tener muchas soluciones, pero el gradiente de cada solución es el mismo. Es decir, en el caso electrostático: *existe un único campo eléctrico derivado de una función potencial que satisface la ecuación de Poisson bajo ciertas condiciones de frontera.*

- Entonces por el teorema de unicidad existe solo una función que cumple con las condiciones, i.e., si usamos alguna maniobra inteligente para resolver el problema y cumplir con las condiciones de borde entonces tenemos la solución

Truco: usemos reflexión de imágenes

- Nos olvidamos del problema original y ponemos una carga negativa $-q$ a una distancia $-d < z$, luego podemos escribir fácilmente este potencial,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right] \quad (32)$$

- Donde el denominador representa la distancia de un punto (x, y, z) a las cargas $\pm q$

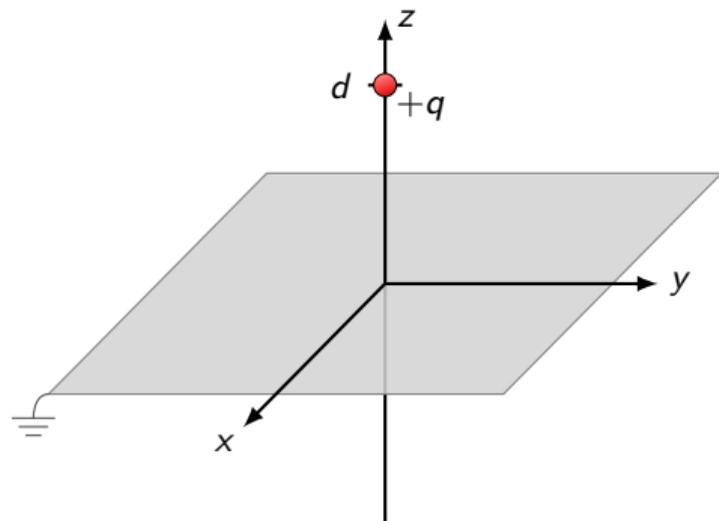


Figura: El problema clásico de imágenes, una carga sobre un plano conductor (conectado a suelo; *grounded*).

Truco: usemos reflexión de imágenes

- Nos olvidamos del problema original y ponemos una carga negativa $-q$ a una distancia $-d < z$, luego podemos escribir fácilmente este potencial,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right] \quad (32)$$

- Donde el denominador representa la distancia de un punto (x, y, z) a las cargas $\pm q$

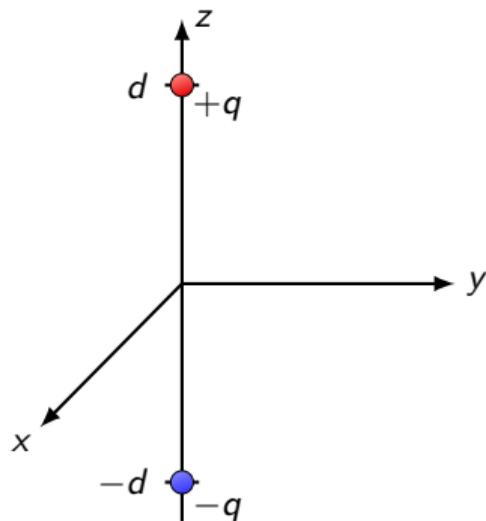


Figura: El problema clásico de imágenes, una carga sobre un plano conductor (conectado a suelo; *grounded*).

- Luego sigue que el problema obtiene las siguientes condiciones:

$$V = 0 \quad \text{con} \quad z = 0,$$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$$

- Lo que concuerda con las mismas condiciones de borde en ecuaciones (30) y (30)
- Nótese que la región bajo $z < 0$ posee un potencial distinto (¡pero eso no nos importa!)
- Conclusión: La solución al potencial $z > 0$ está dado por ecuación (32)
- Si se satisface la ecuación de Poisson, en la región de interés, y cumple con las condiciones de borde, entonces es la solución correcta
- La carga imagen debe ser de signo opuesto, de modo que al centro exista un potencial cero

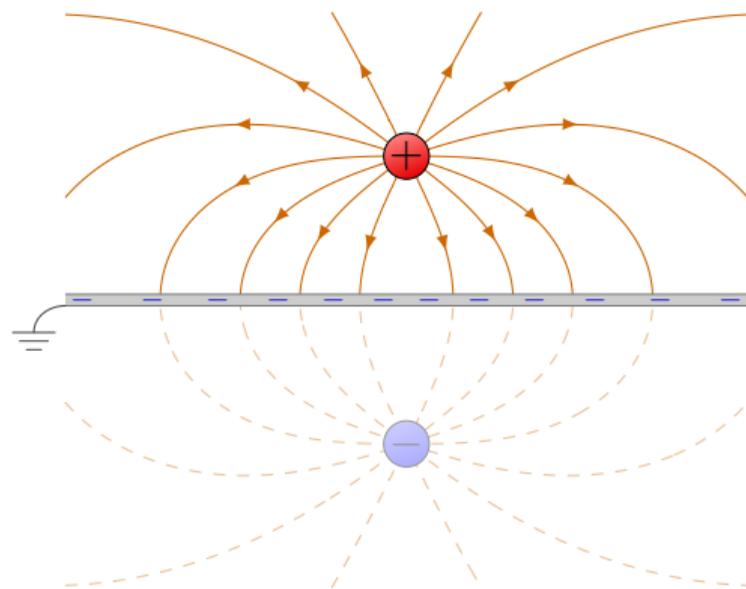


Figura: El problema clásico de imágenes, una carga sobre un plano conductor (conectado a suelo; *grounded*).

Otros ejemplos del método de imágenes

Ejemplo

Una carga puntual q , situada a una distancia a del centro de una esfera conductora conectada a tierra, con radio R . Hallar el potencial fuera de la esfera.

Solución: Nuevamente empleamos el truco de la imagen donde una carga negativa es puesta a cierta distancia de la carga positiva.

- La nueva carga $q' = -\frac{R}{a}q$, la situamos a $b = \frac{R^2}{a}$
- Olvidamos el conductor y calculamos el potencial entre las dos cargas:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{s} - \frac{q}{s'} \right) \quad (33)$$

- Donde s y s' son la distancia (del vector posición) a las cargas q y q' , respectivamente

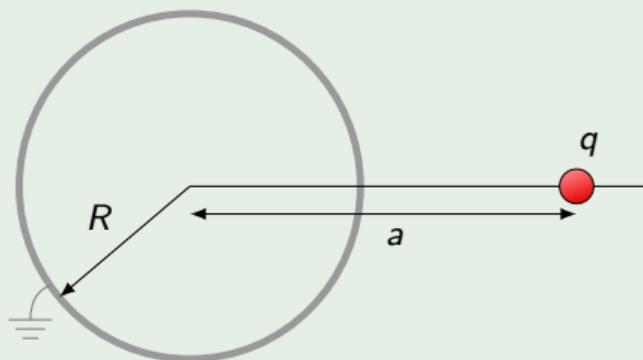


Figura: Esfera conductora a tierra y carga q a una distancia a .

Otros ejemplos del método de imágenes

Ejemplo

Una carga puntual q , situada a una distancia a del centro de una esfera conductora conectada a tierra, con radio R . Hallar el potencial fuera de la esfera.

Solución: Nuevamente empleamos el truco de la imagen donde una carga negativa es puesta a cierta distancia de la carga positiva.

- La nueva carga $q' = -\frac{R}{a}q$, la situamos a $b = \frac{R^2}{a}$
- Olvidamos el conductor y calculamos el potencial entre las dos cargas:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{s} - \frac{q}{s'} \right) \quad (33)$$

- Donde s y s' son la distancia (del vector posición) a las cargas q y q' , respectivamente

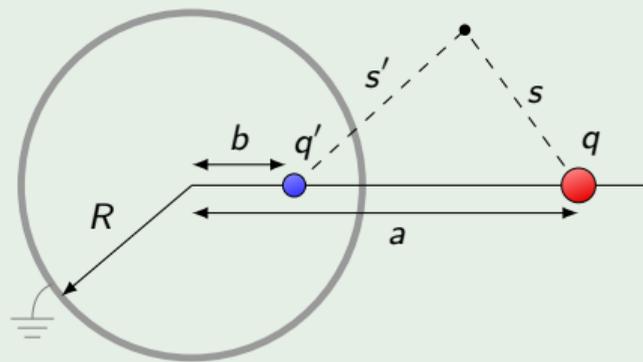


Figura: Esfera conductora a tierra y carga q a una distancia a .

Otros ejemplos del método de imágenes

Ejemplo

- Otra vez, el potencial se va a cero en cualquier punto R de la esfera, cumpliendo con la condición de borde del problema original
- Nótese que $b < R$, la carga imagen q' debe permanecer en una región fuera de donde se está calculando V , de lo contrario se alteraría ρ
- En particular note el resultado (súper simplista) de la fuerza:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2} \quad (34)$$

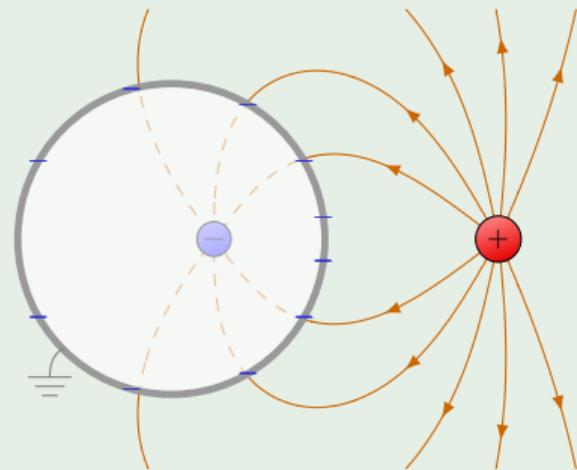


Figura: Esfera conductora a tierra y carga q a una distancia a .

Otros ejemplos del método de imágenes

Ejercicios

- 1 Usando la ley de cosenos, pruebe que ecuación (33) puede ser escrita como:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + (ra/R)^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \quad (35)$$

Con r, θ coordenadas polares, y con q en el eje- z . En esta forma es obvio que $V = 0$ en la esfera cuando $r = R$.

- 2 Encontrar la carga superficial inducida sobre la esfera, en función de la coordenada θ . Luego integrar para encontrar la carga inducida total.
- 3 Calcular la energía de esta configuración.

Resumen

- Hoy repasamos nuevamente los conceptos de Poisson y Laplace
- Estudiamos los métodos de integración directa, separación de variables y el método de las imágenes
- Los primeros dos métodos son directos donde puede existir un alto nivel de matemática
- El método de las imágenes es rápido pero un primer paso astuto es necesario para poder llegar a una solución (existen varios ejemplos en [Griffiths 2017](#))
- Próxima clase: 1.4 métodos de la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace (los puntos restantes)

Bibliografía

Boas, M. L., & Spector, D. 1999, American Journal of Physics, 67, 165, doi: [10.1119/1.19218](https://doi.org/10.1119/1.19218)

Boyer, C., & Merzbach, U. 2011, A History of Mathematics (Wiley)

Griffiths, D. J. 2017, Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. (Prentice Hall)