

Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 2. Materiales, sus propiedades e importancia: Dieléctricos

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

22 de agosto de 2023

 tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

1 Materiales dieléctricos

- Introducción

2 Suceptibilidad, permitividad y constante dieléctrica

- Interpretación matemática avanzada
- Ley de Gauss
- Dieléctricos isotrópicos y anisotrópicos

3 Mecanismos de polarización

- Aspectos generales
- Electrónica
- Iónica
- Dipolar

4 Resumen

5 Bibliografía



Figura: Capacitores, sistema capaz de almacenar energía en forma de campo eléctrico. Capacitores fueron inventados en 1740, llamados *Leyden jars*.

Introducción

- Materiales dieléctricos (Lectura complementaria [Scaife 1998](#))
 - Material no conductor que puede ser polarizado al aplicar un campo eléctrico
 - Un dieléctrico perfecto es el cual posee conductividad eléctrica igual a cero
- Dieléctricos son importantes en el estudio de:
 - Electrónica
 - Óptica
 - Física del estado sólido (un área de física de materia condensada)
 - Biofísica celular
- **Dieléctrico**: dia (del latín, a través de) + eléctrico (de campo eléctrico)
- Material con muy baja conductividad $\sigma \ll 1$
- Un material conductor es una barrera contra un campo eléctrico externo (ya que lo remueve!) mientras que un dieléctrico es un medio que permite el paso de un campo eléctrico externo

Atención!

Todos los materiales dieléctricos son aislantes pero no todos los materiales aislantes son dieléctricos.

Introducción a dieléctricos

- Dieléctricos (en el sentido clásico) son aquellos que poseen un material **no conductor** entre las placas (conductoras) de un capacitor
- Esta configuración de materiales es capaz de generar una capacitancia de varios $\sim 1 \mu\text{F}$
- ¿Por qué un material no conductor entre conductores?
 - 1 Resuelve problema mecánico de tener dos placas separadas a una d constante pequeña y sin contacto efectivo
 - 2 Un dieléctrico aumenta a la máxima ΔV posible entre placas de un capacitor
 - 3 La capacitancia es mayor cuando existe un dieléctrico entre placas que el vacío
- Cualquier material dieléctrico al someterse a un \mathbf{E} (suficientemente alto) genera *ruptura del dieléctrico*
- Ruptura del dieléctrico \rightarrow ionización parcial que permite conducción a través del dieléctrico
- Dieléctrico \rightarrow almacena más ΔV , i.e., mayor carga y energía almacenada
- Constante dieléctrica del material, $\epsilon_r \geq 1$

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0} \quad (1)$$

- Etiqueta "0" \rightarrow capacitancia original o en el vacío $C_0 = Q/V_0$

Introducción a dieléctricos

- Al igual que en conductores nos centraremos en el análisis de campos y no en fuerza o dinámica de la partícula
- Esto hace que el análisis sea macroscópico y con una buena aproximación a la realidad
- Al insertar un material dieléctrico:
 - La carga Q es constante
 - Si E_0 es el valor del campo en el vacío

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (\text{cuando } Q \text{ es constante}) \quad (2)$$

Introducción a dieléctricos

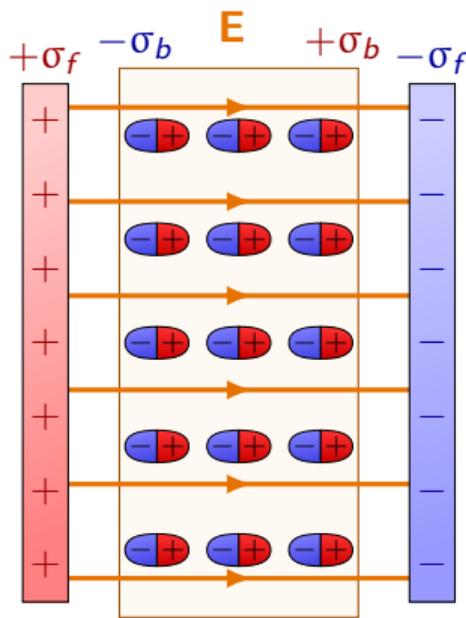
- **Polarización:** La carga superficial de las placas no cambia, pero si aparece una carga *inducida* de signo opuesto a la superficie del dieléctrico
- Suponemos que la carga superficial inducida es proporcional a E
- El campo eléctrico sin/con dieléctrico^a:

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0} \quad (3)$$

- Densidad de carga superficial inducida:

$$\sigma_b = \sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$

^aCon b y f las cargas *bound* y *free*.



- (4) **Figura:** Dieléctrico: material no conductor entre placas paralelas de un capacitor. Las cargas inducidas en las caras del dieléctrico reducen el campo eléctrico.

Introducción a dieléctricos

Cuadro: Valores de constante dieléctrica ϵ_r a 20 °C (Sears et al. 2005).

| Material | ϵ_r | Material | ϵ_r |
|--------------------|--------------|-----------------------|--------------|
| Vacío | 1 | Cloruro de polivinilo | 3,18 |
| Aire (101,325 kPa) | 1,000 59 | Plexiglás | 3,40 |
| Aire (101,325 kPa) | 1,0548 | Vidrio | 5–10 |
| Teflón | 2,1 | Neopreno | 6,70 |
| Polietileno | 2,25 | Germanio | 16 |
| Benceno | 2,28 | Glicerina | 42,5 |
| Mica | 3–6 | Agua | 80,4 |
| Muylar | 3,1 | Titanato de estroncio | 310 |

Definiciones

- **Ruptura del dieléctrico:** E suficientemente intenso que hace que el dieléctrico se vuelva conductor.
- **Resistencia dieléctrica:** E_{\max} que un material pueda soportar sin ruptura del dieléctrico.

Extra: capacitores en serie

- Antes que pasemos a matemática más específica recordemos que la capacitancia puede ser calculada de forma equivalente para un sistema, C_{eq}
- Cuando conectamos capacitores en serie entonces

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5)$$

- Cuando conectamos capacitores en paralelo

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \sum_{i=1}^n C_i \quad (6)$$

- En términos generales, la energía potencial de un capacitor a una diferencia de potencial V es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV \quad (7)$$

Introducción a dieléctricos

Ejercicio

- El espacio entre placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante ϵ_{r1} y otro con constante ϵ_{r2} . El espesor de cada placa de dieléctrico es de $d/2$, donde d es la separación entre las placas del capacitor. Demuestre que la capacitancia es:

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}} \right)$$

- El cilindro interior de un capacitor cilíndrico largo tiene un radio r_a y una densidad de carga lineal $+\lambda$. Está rodeado de una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior r_b y una densidad de carga lineal $-\lambda$.
 - 1 ¿Cuál es la densidad de energía en la región comprendida entre los conductores a una distancia r del eje?
 - 2 Integre la densidad de energía calculada en el inciso (1) con respecto al volumen de los conductores, en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud.

El dipolo eléctrico

- El modelo de dipolo eléctrico nos ayudará a entender materiales y cómo son clasificados
- Consideremos dos cargas puntuales, $\pm q$ centradas en el eje- z y a una distancia relativa d
- Luego es evidente que el potencial eléctrico en un punto P a una distancia r es:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} \quad (8)$$

- r_{\pm} son la distancia de la carga $\pm q$ al punto P

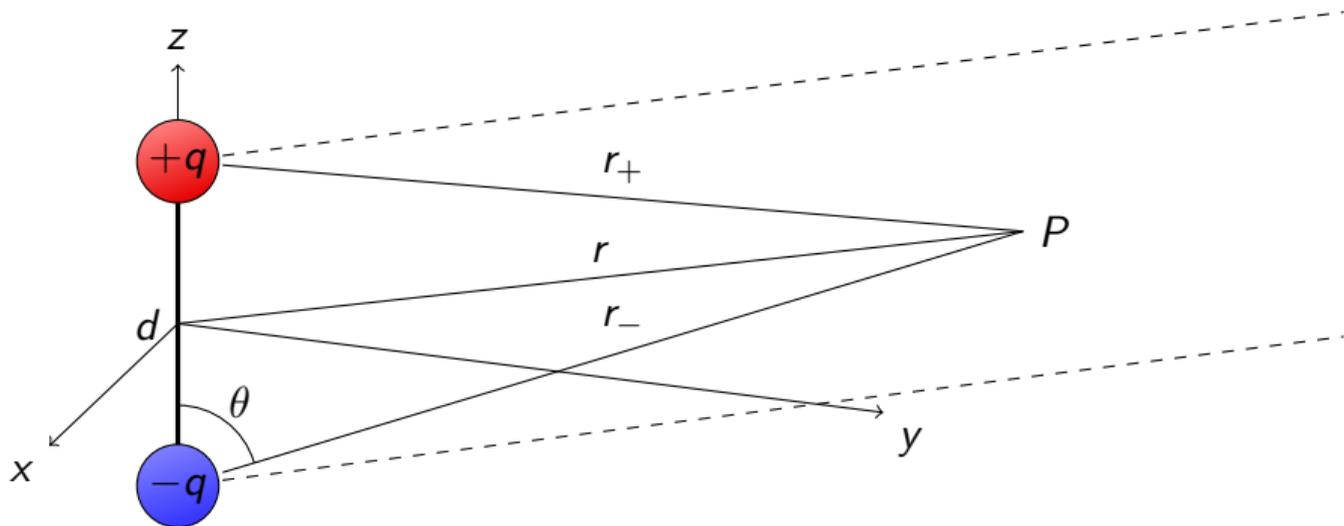


Figura:
Dipolo
eléctrico.

El dipolo eléctrico

- Ahora extendamos la posición de P al infinito, i.e., $P \rightarrow \infty$ (i.e., usando coordenadas esféricas $r \gg d$)
- Lo que provoca que la inclinación de r_{\pm} se vuelve casi paralela; $r_+ \parallel r_-$

$$r_{\pm} = r \pm \frac{1}{2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad V_P \approx \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (9)$$

- Usando la expresión del gradiente en coordenadas esféricas (ver formulario del curso o Clase 0):

$$\mathbf{E} = -\nabla V_P = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (10)$$

- Es decir, el **campo eléctrico varía el recíproco del cubo de la distancia al dipolo**
- Definimos el vector de momento dipolar como:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (11)$$

- \mathbf{d} es el vector que apunta de $-q$ a $+q$; i.e., $\mathbf{d} = l\hat{\mathbf{z}}$

El dipolo eléctrico

- Razón por la cual se le llama dipolo, ya que un campo eléctrico tiende a alinear \mathbf{p} con su misma dirección
- Entre más larga la separación d mayor será el momento, y consecuentemente su fuerza de rotación
- Consideremos ahora un volumen lleno de pequeños dipolos, entonces podemos calcular su total en un volumen, i.e., momento dipolar por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \quad (12)$$

- Evidentemente, para un sistema microscópico \mathbf{P} variará mucho de punto-a-punto y la cantidad \mathbf{P} no representará bien a el sistema
- Para un sistema macroscópico, i.e., un dieléctrico, \mathbf{P} representa de buena manera a la **polarización** de un material de volumen ΔV
- En sustancias polares y $E = 0$ dipolos se orientan aleatoriamente, $P = 0$

De dipolo a dieléctrico

- Retomamos el concepto de la Clase 1: desde la ecuación de Maxwell (i):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \rho_f + \rho_b \quad (13)$$

- Con ρ_f la componente libre (*free*) o independiente del material, y ρ_b la componente atrapada (*bound*) o debida la acción de cientos de pequeños \mathbf{p}_i alineándose a un campo externo
- Naturalmente podemos (re-)definir \mathbf{D}

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{(\mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E})}_{\mathbf{D}} = \rho_f \quad (14)$$

- Con lo que ρ_b puede ser entendido similarmente a la ecuación de Maxwell (i), i.e., una fuente ρ_b genera una polarización \mathbf{P}
- Finalmente, ahora es evidente el porque en un caso macroscópico podemos usar la aproximación $\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, con $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal a la superficie del dieléctrico

Polarización

- Recordemos que:

$$\mathbf{P} \equiv \text{momento de dipolo por unidad de volumen} \quad (15)$$

- El campo dentro de un dieléctrico es muy complejo de estudiar y modelar, limitación matemática
- La clave está en solo centrarse a nivel macroscópico
- Un análisis de cargas fuera y dentro de un dieléctrico puede ser resumida a nivel macroscópico como:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\widehat{\mathbf{s}}\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{s^2} d\tau' \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\widehat{\mathbf{s}}\mathcal{P}(\mathbf{r}', t)}{s^2} d\tau' \quad (16)$$

- Asumiendo que \mathbf{P} no varía en el volumen del dieléctrico
- Ecuación (16) es el potencial promedio de dominios individuales o *potencial macroscópico*

Ley de Gauss en dieléctricos

- Recordatorio: $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ y que sobre la superficie de un dieléctrico la carga superficial es siempre $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
- Ahora analizamos el caso con carga *bound* y carga *free* (que puede corresponder a iones atrapados en el material):

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f \quad (17)$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (18)$$

- Donde hemos re-encontrado el desplazamiento eléctrico, y su ley integral:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f\text{enc}} \quad (19)$$

- La carga $Q_{f\text{enc}}$ corresponde solo a la carga encerrada y no a la carga *bound*, algo que es fundamental en el laboratorio, no sabemos con certeza cual es
- Este hecho también puede ser generalizado para el caso variable en el tiempo

Constante dieléctrica en un dieléctrico lineal

- Para la mayoría de los materiales, la polarización es proporcional al campo eléctrico

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}; \quad \chi_e \equiv \textit{susceptibilidad eléctrica} \quad (20)$$

- Donde χ_e depende del material y su estructura (además de temperatura y presión) y es adimensional
- Nótese que \mathbf{E} en ecuación (20), es el campo total, compuesto de cargas libres y por efecto de la polarización del dieléctrico
- Nuevamente en un medio lineal (i.e., $P \propto E$):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)} \quad (21)$$

- (re-)definimos la constante dieléctrica como (también llamada permitividad relativa):

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (22)$$

- Sólo para un dieléctrico lineal (definido en ecuación 20)
- Ecuación constitutiva $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ puede también ser representada en términos de ϵ_r

Conservación de carga

- Hasta ahora hemos considerado el movimiento de cargas en materiales metálicos
- El movimiento de cargas también puede ocurrir en medio no metálicos
- Ejemplo: ánodo y cátodo en un tubo al vacío, electrones son librados en un punto y recolectados en otro → **corriente por convección**
- **Corriente por conducción** es lo que pasa en conductores
- La densidad de corriente puede entonces ser generalizada por su densidades de carga positivas y negativas:

$$\mathcal{J} = \rho_v^+ \mathbf{v}^+ + \rho_v^- \mathbf{v}^- \quad (23)$$

- Tanto como para corrientes por conducción o convección, el cambio en la densidad de carga es igual a la corriente pasando por la superficie a ,

$$\oint \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int \rho_{\text{enc}} d\tau \quad (24)$$

- Aplicando el teorema de la divergencia, llegamos a la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (25)$$

Tiempo de relajación

- Tiempo en el cual un **conductor** alcanza un $E = 0$ al ser expuesto a carga extra (*charge imbalance*)
- En conductores es del orden de $\sim 10^{-19}$ s, cristal de cuarzo 10 d!
- Una vez que el conductor alcanza este estado, no hay carga dentro del conductor y por la ley de Gauss: $\mathcal{E} = 0$
- Determinemos el tiempo de relajación, usamos (i), ley de Ohm y ecuación constitutiva

$$\nabla \cdot (\sigma \mathcal{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathcal{E}) = \rho \quad (26)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad (27)$$

- Para el caso de un conductor lineal, isotrópico y homogéneo, tenemos que σ y ϵ son constantes,

$$\rho = \rho_0 e^{-\sigma/\epsilon t}, \quad \Rightarrow \tau_r \equiv \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (28)$$

- Donde τ_r es el tiempo de relajación, y decae a cero en $t \rightarrow \infty$

Dieléctricos homogéneos y lineales

- En medios lineales y homogéneos, la densidad de carga atrapada es proporcional a la libre:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f \quad (29)$$

- Toda carga debe solo existir en el límite del dieléctrico y usando las condiciones de borde (derivadas de ecuaciones de Maxwell; Clase 2 ecuación 68),

$$\epsilon_{\text{arriba}} E_{\text{arriba}}^{\perp} - \epsilon_{\text{abajo}} E_{\text{abajo}}^{\perp} = \sigma_f \quad (30)$$

- Similarmente esta puede ser expresada en términos del potencial

$$\epsilon_{\text{arriba}} \frac{\partial V_{\text{arriba}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{abajo}} \frac{\partial V_{\text{abajo}}}{\partial n} = -\sigma_f \quad (31)$$

- $V_{\text{arriba}} = V_{\text{abajo}}$; $V_{\text{arriba}} - V_{\text{abajo}} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, para un camino infinitesimalmente pequeño (electrostática)

Dieléctricos anisotrópicos

- Nuevamente la constante dieléctrica (ϵ_r) también depende de la dirección en el dieléctrico
- Por lo general, en un cristal es más fácil polarizar en algunas direcciones que en otras

$$\begin{aligned}
 P_x &= \epsilon_0 \left(\chi_{e_{xx}} E_x + \chi_{e_{xy}} E_y + \chi_{e_{xz}} E_z \right) \\
 P_y &= \epsilon_0 \left(\chi_{e_{yx}} E_x + \chi_{e_{yy}} E_y + \chi_{e_{yz}} E_z \right) \\
 P_z &= \epsilon_0 \left(\chi_{e_{zx}} E_x + \chi_{e_{zy}} E_y + \chi_{e_{zz}} E_z \right)
 \end{aligned} \tag{32}$$

- Lo que queda descrito a través de un tensor de susceptibilidad

Ejercicio

El espacio entre un capacitor de placas paralelas es llenado con dos dieléctricos uno arriba del otro. Cada dieléctrico tiene un espesor a , de modo que la distancia entre las placas paralelas (del capacitor) es $d = 2a$. Los dieléctricos tienen constante dieléctrica (ϵ_r) igual a 2 y 1,5. La carga libre entre las placas es de $+\sigma$ y $-\sigma$. Calcular para cada dieléctrico \mathbf{D} , \mathbf{P} , \mathbf{E} y la diferencia de potencial entre placas.

Energía almacenada en un dieléctrico

- El trabajo necesario para almacenar carga en un capacitor es:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (33)$$

- Usando nuevamente la constante dieléctrica; $C = \epsilon_r C_0$ con "0" vacío
- El trabajo almacenado por un sistema electrostático (ecuación 60 Clase 2)

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (34)$$

- Expandiendo para un capacitor y su dieléctrico

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (35)$$

- En presencia de un dieléctrico lineal

Mecanismos de polarización

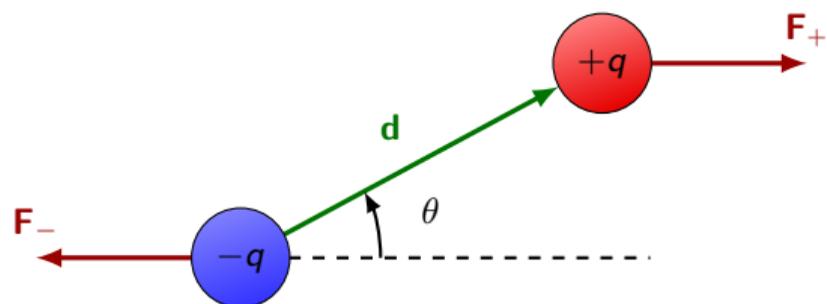


Figura: Representación de dipolo en presencia de un campo eléctrico E (con dirección y sentido hacia la derecha).

- De mayor a menor ϵ_r
 - Polarización de interfaz
 - Polarización de dipolo
 - Polarización iónica
 - Polarización atómica
- Momento de un dipolo \mathbf{p} con cargas separadas a una posición \mathbf{d}

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (36)$$

- Momento o fuerza de torque:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (37)$$

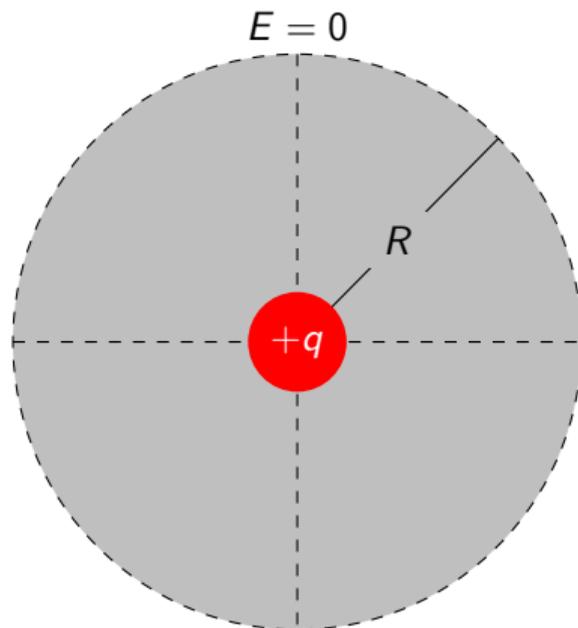
- Para un solo dipolo el potencial está descrito como:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p}}{s^2} \quad (38)$$

Polarización electrónica

- Moléculas/átomos son nubes electrónicas donde su contenido es casi vacío
- Puede ser modelado por una nube esférica donde su orientación y forma representa la probabilidad de encontrar un electrón
- La polarización electrónica cambia la forma de la nube, esfera \rightarrow esfera achatada
- Polarización de un átomo $p = qd$ (d distancia núcleo a centro de masa)
- Desde un punto de vista clásico, la fuerza de atracción es:

$$F = qE \quad (39)$$



Atención!

¿Qué evita que la nube se separe indefinidamente?

Polarización electrónica

- La carga de nucleones es: $q = +Ze$
- $e \equiv -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Asumiendo un modelo de e^- orbital, entonces:

$$q_d = \frac{qV_d}{V_R} \quad (40)$$

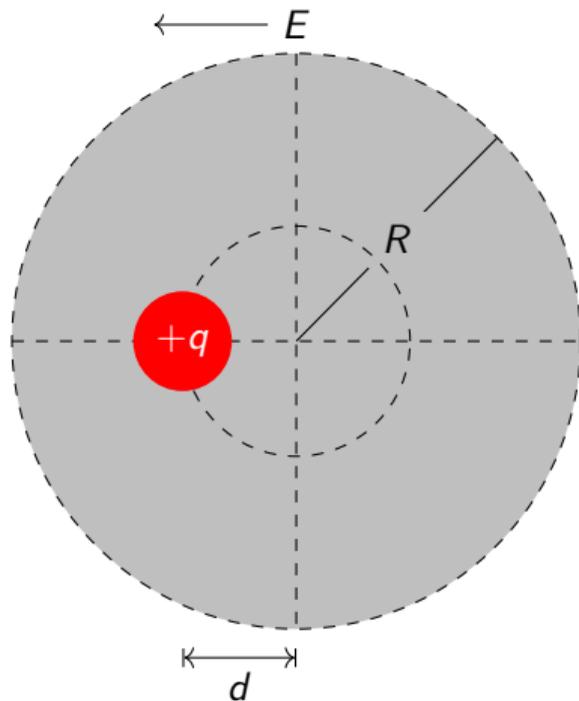
- La fuerza generada por la atracción de cargas

$$F = \frac{qq_d}{4\pi\epsilon_0 d^2} \Rightarrow d = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E}{Ze} \quad (41)$$

- Polarización electrónica

$$P = pN = qdN \Rightarrow p = 4\pi NR^3 \epsilon_0 E \quad (42)$$

- $N \approx 3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ y $R = 6 \times 10^{-9} \text{ cm}$



Polarización iónica

- Similar al anterior pero ahora en una red cristalina, por ejemplo Na^+ y Cl^-
- Sean las moléculas (antes de un campo E_{ext}) separadas a una distancia d_0
- Luego de la acción de E_{ext} , la separación es ahora $d + d_0$
- Existe entonces una fuerza eléctrica, y una elástica (modelado similarmente a la ley de Hook)

$$F = qE; \quad F = kd; \quad k = Yd \quad (43)$$

$$d = \frac{qE}{Yd_0} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{Nq^2}{Yd_0} E \quad (44)$$

Polarización dipolar (orientacional)

- Debido a un equilibrio termodinámico, moléculas se encuentran en un equilibrio electrostático apuntando en direcciones aleatorias
- Cuando un campo E_{ext} está presente hace que las moléculas se re-orienten
- Hay un movimiento mismo de la molécula debido a fuerza eléctricas
- Mecánica estadística (termodinámica de lo pequeño), la distribución de Maxwell-Boltzmann al interactuar con un E_{ext} , que como es conocida, su velocidad es:

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (45)$$

- Donde $k_B \equiv 1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ corresponde a la constante de Boltzmann
- Será visto nuevamente en el futuro ...

Resumen

- Dieléctricos pueden llegar a ser conductores cuando un campo eléctrico es lo suficientemente fuerte
- Capacitores con dieléctricos pueden almacenar una gran diferencia de potencial con una infinidad de aplicaciones
 - Capacitores (almacenamiento de energía)
 - Componente básico de semi-conductores
 - Transformadores de corriente continua a corriente alterna (y viceversa)
 - Presentes en: *liquid crystal displays* (LCDs), *coatings*, procesos de enfriamiento (*cooling processes*)
 - La sociedad moderan no existiría sin dieléctricos
- Dieléctricos experimentan diferentes tipos de polarización: electrónica, iónica, dipolar y de interfaz
- Próxima clase: 1.2.3 materiales, sus propiedades e importancia: materiales magnéticos

Bibliografía

Scaife, B. 1998, Principles of Dielectrics, Monographs on the Physics and Chemistry of Materials (OUP Oxford).

<https://books.google.cl/books?id=9GBP9uBwpScC>

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. 2005, Física Universitaria, 9th edn., Vol. 2 (Pearson Education)