

Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 2. Materiales, sus propiedades e importancia: Conductores

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

21 de agosto de 2023

 tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

1 Materiales

- Introducción a materiales
- Conceptos generales de conducción

2 Materiales conductores

- Propiedades básicas
- Selección de conductor
- Conductores metálicos y no metálicos

3 Resumen

4 Bibliografía



Figura: Heike Kamerlingh Onnes 1853–1926. Nobel Laureate. Descubridor de la superconductividad.

Introducción

- Estudiaremos brevemente el origen (microscópico) de las propiedades de tres clases de materiales:
 - **Conductores**
 - Dieléctricos
 - Magnéticos
- Ecs. de Maxwell y conexión con estos materiales
- No estudiaremos materiales del área tecnológica como los son superconductores (~ 0 K) o semiconductores
 - Semiconductores y superconductores (Casalbuoni 2018; Singh et al. 2022; Aguirre et al. 2022) \rightarrow física de materia condensada
 - Avances en electrónica exclusivamente impulsados por el desarrollo de ciencia de materiales
 - Física de plasma (muy buenos conductores)

Cuadro: Clases de materiales y su resistividad

Material	Resistividad ρ Ω m
Superconductores	0
Metales	10^{-8}
Semiconductores	Variable
Aislantes	10^{16}
Super-aislantes	∞

Recordatorio ecuaciones de Maxwell

(i)

$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$$

(ii)

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$

(iii)

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

(1)

(iv)

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

(2)

- Para resolver cualquier problema en materiales:
 - Ecuaciones de Maxwell en materiales (obviamente), i.e., con \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathcal{E} y \mathcal{B}
 - Fuerza de Lorentz
 - Ecuaciones constitutivas (dependientes del tipo de material y su estructura)
 - Valores de frontera (condiciones de borde)

Ecuaciones de Maxwell: medio lineal, isotrópico y homogéneo

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (4)$$

- Donde el set de ecuaciones ahora solo depende de seis componentes \mathcal{E} y \mathcal{H}
- Nótese que el set no es aplicable a todas las situaciones, e.g., materiales ferromagnéticos
- Por lo general si es un set de ecuaciones que cumple con condiciones cotidianas

La razón en el uso de materiales

- Por ejemplo, light-emitting diode (LED)
 - Composición: cristales de SiC, GaAs, GaSb
 - Ventajas: direccionalidad de la luz, eficiencia, tamaño
- Pantallas plana de un computador
 - Composición: polímeros o cerámicas
 - Chips: Si entrelazado con materiales como P, B, As, SiO₂, Si₃N₄, MoSi₂, W, TiN, Al, Cu
 - Cristal líquido compuesto de una solución polar

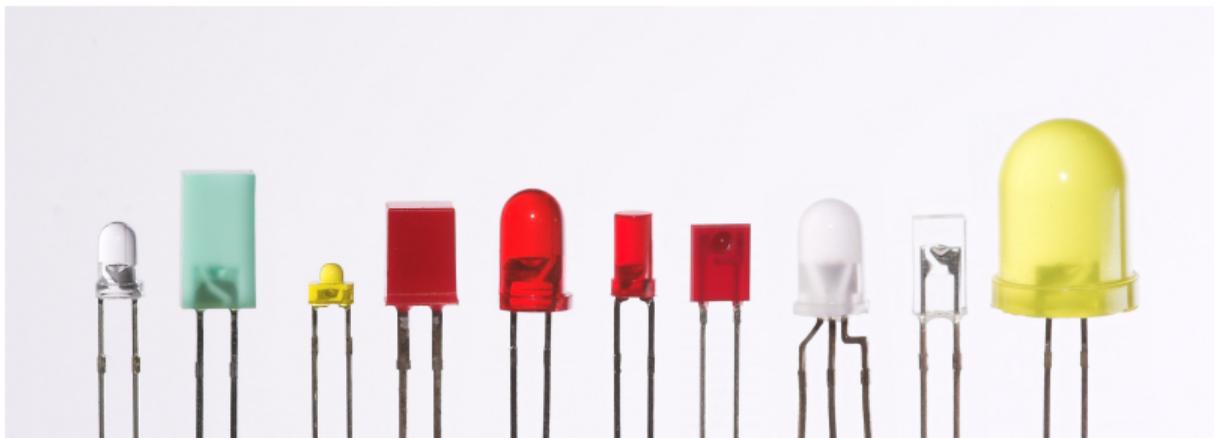


Figura: LEDs son producidos en diferentes tamaños y formas. Cada uno con ánodo y cátodo para la condición eficiente.

Ley de Ohm

- La corriente es un flujo y las cargas son *empujadas*
- Que tan rápido es el flujo depende de la naturaleza del material
- Para la mayoría de los materiales \mathcal{J} es proporcional a \mathbf{f} (fuerza por unidad de carga):

$$\mathcal{J} = \sigma \mathbf{f}; \quad \sigma \equiv \text{conductividad} \quad \text{y} \quad \rho \equiv \frac{1}{\sigma} \equiv \text{resistividad} \quad (5)$$

$$\mathcal{J} = \sigma (\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}) \quad (6)$$

- ¡ $\rho \neq \sigma$; no confundir con la carga superficial! $\rho \neq \rho$; no confundir con la densidad de carga!
- Pero el término \mathcal{B} es pequeño \mathbf{v}^0

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$$

(7)

Atención!

- Solo en casos de gran velocidad de partículas y campos magnéticos estaremos en presencia del segundo orden de conductividad σ , por ejemplo la propagación de carga a través de un plasma.
- Nótese que en electrostática $\mathcal{J} = \mathbf{J} = \text{constante en } t$, es decir: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

Ley de Ohm

- En general, si tenemos un cable uniforme de *cross-section* área A y largo L

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L} \Delta V \quad (8)$$

- Con ΔV la diferencia de potencial
- Recordemos que materiales puede ser o no isotrópicos respecto a su conductividad/resistividad, i.e.,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

- El par $(\sigma, \rho) \rightarrow$ depende de composición, estructura atómica/molecular, temperatura, presión, y otros

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Resistividad de materiales

Cuadro: Lista de resistividades (ρ) en $\Omega \text{ m}$. Todos los valores fueron medidos a 101 325 Pa y 20 °C (Haynes 2014).

Conductores	$\rho \ \Omega \text{ m}$	Semi-conductores	$\rho \ \Omega \text{ m}$	Aislantes	$\rho \ \Omega \text{ m}$
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$	Agua salada (saturada)	$4,4 \times 10^{-2}$	Agua	$2,5 \times 10^5$
Cobre	$1,68 \times 10^{-8}$	Germanium	$4,6 \times 10^{-1}$	Madera	$10^8\text{--}10^{11}$
Oro	$2,21 \times 10^{-8}$	Diamante	2,7	Vidrio	$10^{10}\text{--}10^{14}$
Aluminio	$2,65 \times 10^{-8}$	Silicon	$2,5 \times 10^3$	Cuarzo	$\sim 10^{16}$

Corriente

- La velocidad de desplazamiento (inversa al sentido de la corriente), v_d , es movimiento de carga (y no e^-)
- Si calculamos la densidad de corriente:

$$J = \frac{qN}{At} = \frac{qnVv_d}{AL} = qnv_d \iff J = \sigma E \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{qnv_d}{E} = qn\mu \quad \Rightarrow \mu \equiv \text{movilidad eléctrica}$$

- N numero total de cargas negativas y $n = N/V$
- v_d es constante para un campo \mathbf{E} dado
 - Pero si aumentamos \mathbf{E} , v_d crece indefinidamente?
 - No! \rightarrow dispersión

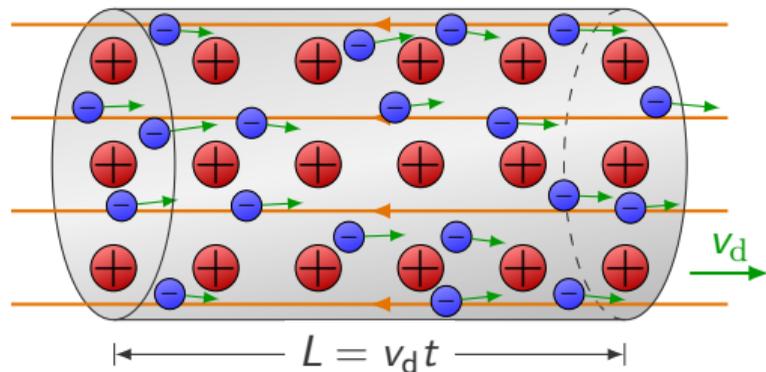


Figura: Flujo de corriente sobre un conductor de largo L .

Corriente y su transporte

- *Mean free path* o movilidad eléctrica ($\mu \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$, no confundir con permeabilidad)
 - La movilidad media que posee una corriente al ser transportada en un material macroscópico
 - $\tau \equiv$ tiempo promedio entre colisiones
 - $\ell \equiv$ distancia promedio entre colisiones $= \tau (v_0 + v_d)$
 - v_0 es la velocidad de cargas en ausencia de campo eléctrico

$$qE - f_r = m^* \frac{dv}{dt} \quad (12)$$

$$eE - \frac{m^*}{\tau} v = m^* \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{q\tau E}{m^*} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (13)$$

$$\Rightarrow v_d = \frac{q\tau E}{m^*} \Rightarrow \mu = \frac{q\tau}{m^*} = \frac{q\ell}{m^* v_d} \quad (14)$$

- Nótese que $m^* \neq m_e$!
- Física mesoscópica y del estado sólido: *ballistic conduction*
- m^* corresponde a la *masa efectiva*, masa que corresponde a fuerzas que un material tiende a percibir cuando interactúa con partículas idénticas

Corriente y su transporte

- Limitantes de la movilidad eléctrica en materiales
 - Otros electrones (e^-) o iones
 - Defectos, entendidos como impurezas del material usado, en particular genera un incremento de la temperatura
 - Fonones¹, vibraciones que ocurren en un sólido, importante a altas temperaturas
- En general, a altas temperaturas, ρ incrementa linealmente con la temperatura
- Si la temperatura no varía en grandes proporciones, la aproximación puede ser usada:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (15)$$

- $\alpha \equiv$ coeficiente de temperature de resistividad

¹Un fonón o *phonon* puede ser expresado como la cuantización de una onda mecánica en una estructura elástica, similar a el caso de un fotón (o *photon*) que es la cuantización de una onda electromagnética.

Regla de Mathessien: material lineal y su límite

- La resistividad de un material puede ser expresada como:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

- ρ_0 constante ligada a las impurezas del material o defectos
- $\rho(T)$ variable dependiente de temperatura
 - Ley lineal: fonón
 - Ley cuadrática: algunas redes cristalinas
- Un material puede poseer distinta resistividad dependiendo del orden y configuración de átomos/moléculas

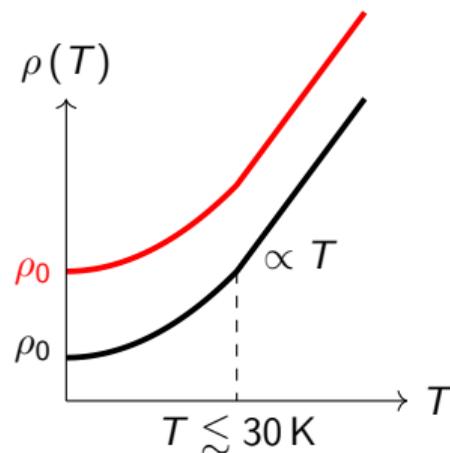


Figura: Resistividad de materiales en función de la temperatura T .

Conductores y sus propiedades

- Un **dieléctrico** (o aislante eléctrico) posee e^- (o ion) que esta (casi)-siempre ligado a un átomo o molécula
- En un **conductor** e^- son libres de moverse en el material de un átomo a otro
- Por lo general, en un líquido (agua), son los iones los que toman este papel de libre movimiento
- Un conductor perfecto es aquel que contiene una fuente ilimitada de e^- /iones completamente libres
- Propiedades de un conductor ideal:
 - 1 $\mathbf{E} = 0$ dentro de un conductor
 - 2 $\rho = 0$ dentro de un conductor
 - 3 Toda carga solo reside en la superficie del material conductor
 - 4 Un conductor es equipotencial
 - 5 \mathbf{E} es perpendicular a la superficie justo fuera del conductor

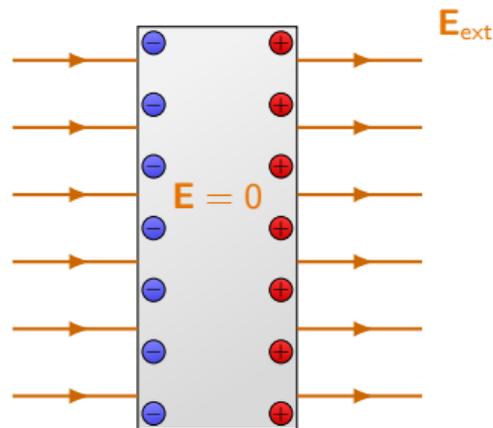


Figura: Material conductor sobre un campo eléctrico externo \mathbf{E}_{ext} .

Conductores y sus propiedades

- Carga superficial y fuerza sobre un conductor
 - Como el campo interior es cero, entonces la superficie²

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (16)$$

- Donde σ is la densidad de carga superficial
- El campo eléctrico en la superficie de un conductor siempre es perpendicular a esta
- En términos del potencial: $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$
- Como existe una discontinuidad (frontera) en este caso qué campo usamos derecha/arriba o izquierda/abajo de la frontera del conductor?
- La respuesta está en el campo medio:

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{avg}} = \frac{1}{2} \sigma (\mathbf{E}_{\text{arriba}} + \mathbf{E}_{\text{abajo}}) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{fuerza por unidad de área}) \quad (17)$$

²Lo que puede ser derivado desde la condición de frontera (i): $\epsilon_1 \mathcal{E}_1^\perp - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^\perp = \sigma_f$.

Capacitores

- Dos capacitores separados y cargados con la misma carga con distinto signo
- Como V es constante en un conductor, podemos hablar de *diferencia de potencial*

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (18)$$

- Usando la ley de Coulomb, y $Q \propto \rho$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{s^2} \hat{\mathbf{s}} d\tau \quad (19)$$

- *Capacitancia*, una cantidad puramente geométrica

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (\text{F} \equiv \text{CV}^{-1}) \quad (20)$$

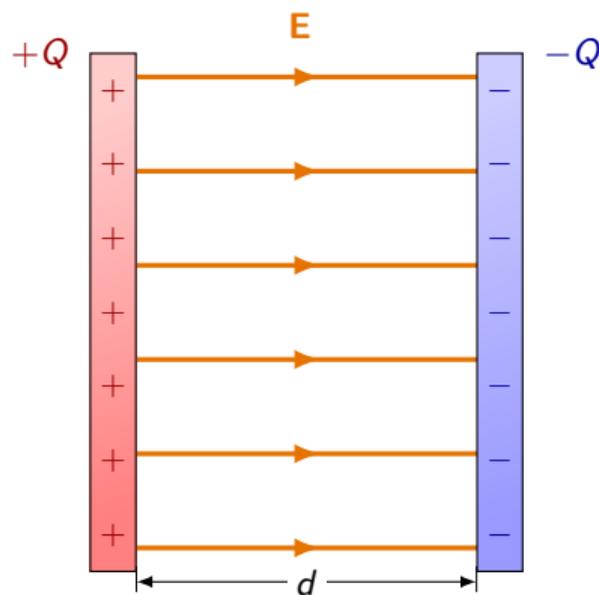


Figura: Capacitor de placas paralelas. Cada placa está compuesta de un conductor cargado con carga total $\pm Q$ y separados a una distancia d .

Capacitor de placas paralelas

Ejemplo

Calcular la capacitancia de dos esferas concéntricas hechas de metal con radios r_a y r_b . Como lo indica la *cross-section* de la Fig. La carga positiva $+Q$ está al interior y la carga negativa $-Q$ al exterior. El grosor de la cáscara metálica es despreciable.

$$\text{Solución: } C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

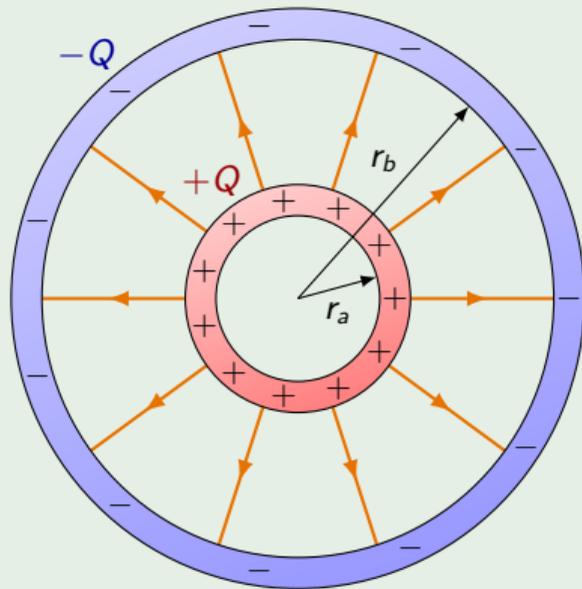


Figura: Capacitor de cáscaras esféricas.

Elección de conductor para determinadas aplicaciones

- Peso (densidad)
- Resistencia mecánica
- Resistencia a la corrosión
- Precio
- Compatibilidad con otros materiales
- Figuras de mérito:

$$\frac{\text{conductividad}}{\text{densidad}} \quad (21)$$

- Solución a costo y problema de optimización:
aleaciones

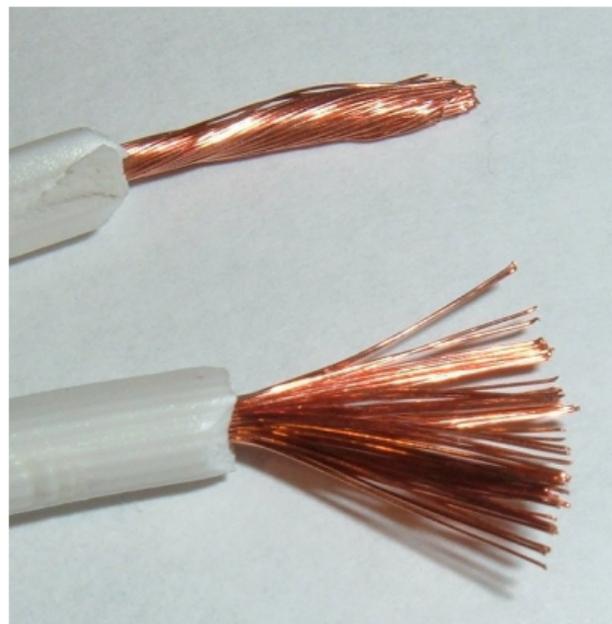


Figura: Conductor eléctrico de cobre.

Aleaciones

- Mezcla de 2 o más materiales
- No es la suma de resistividades
- $\rho_{\text{total}} \neq \rho_A + \rho_B$
- $\rho_{\text{total}} = A_1\rho_A + A_2\rho_B + A_3$ con A_i $i = 1, 2, 3$ constantes
- Tipos de aleaciones:
 - Completamente miscibles (similar a mezclar líquidos)
 - Intermetálicos (creación de nuevas estructuras cristalinas)
 - Completamente inmiscibles (se forman regiones o dominios dentro del material)

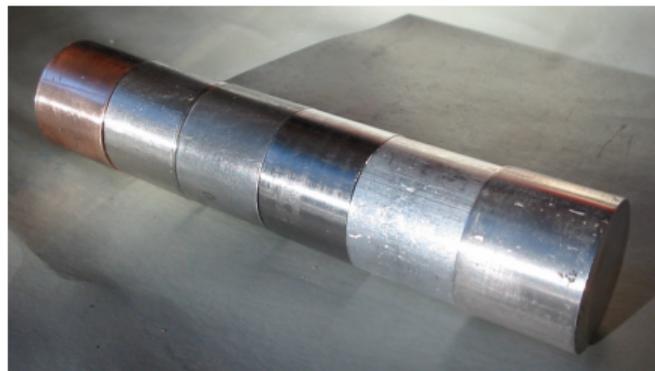


Figura: Aleaciones (izquierda a derecha): berilio de cobre, inonel, acero y 3 metales puros (titáneo, aluminio, magnesio)

Conductores metálicos comunes

■ Algunas Consideraciones

- Precio
- Química (estabilidad y reactividad; corrosión)
- Propiedades mecánicas del material (tensiones internas, dilataciones térmicas, efectos visco-elásticos; metales puros por lo general son muy blandos)
- Propiedades térmicas (estabilidad del material en un rango de temperatura [T_{\min} , T_{\max}])
- Compatibilidad con otros materiales, e.g., corrosión por contacto, soldadura, compatibilidad con Si
- Compatibilidad con tecnologías de producción, viz., manufactura de materiales

■ Aplicaciones

- Muchas muchas aplicaciones!
- Alambres de unión $\varnothing < 30 \mu\text{m}$
- Metalización de chips (i.e., tecnología de radio detección a altas frecuencias)
- Radio antenas desde los MHz a muchos GHz

Conductores metálicos comunes

- Conductores en contacto
 - Interruptores
 - Conectores
 - Conexiones a partes removibles
 - Consideraciones:
 - Poca resistencia por contacto
 - No soldadura o pegado bajo carga
 - No abrasión bajo carga
 - No mezclado de materiales
 - No desgastamiento
 - Propiedades mecánicas adecuadas, e.g., buena elasticidad en interruptores
 - Ejemplos de materiales
 - Grafito (C) conducción a altas corrientes (y estudios con dopaje superconductores)
 - Cu, Ag, Au
 - Ru, Rh, Pd, Os, Ir, Pt

Ejemplo: radio receptor

- Muy similar a antenas antiguas de TV
- Por lo general compuestos de dos polarizaciones³: (V_x, V_y) o (V_r, V_l)
- Compuestos de múltiples materiales
- Conducen y detectan un frente de ondas



Figura: Antena de televisión. La detección de la frecuencia frente de ondas es dependiente del largo de la antena ($\lambda/2$).

³Aquí polarización hace referencia a la polarización del frente electromagnético y **no** a la polarización de un material.

Ejemplo de aplicación: foto detectores

- La detección de radiación se puede realizar con conductores
- El efecto **foto-eléctrico**^a
- Experimento que no sigue el estudio del electromagnetismo clásico (i.e., lo visto en este curso; domino de la física moderna)
- La detección se realiza por fotones (γ) que al chocar con un detector (i.e., conductor) emite un e^-

$$K_{\max} = h(\nu - \nu_0) \quad (22)$$

- ν_0 es la frecuencia límite del material
- h representa la constante de Planck

$$h \equiv 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1} \quad (23)$$

- Charge-coupled device (CCD)

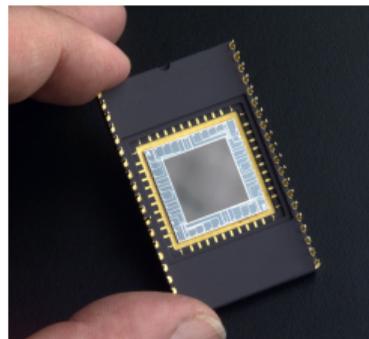


Figura: CCD foto-detector (Howell 2006).

^aEl efecto foto-eléctrico le valió el Nobel a Albert Einstein y **no** su teoría más conocida, la teoría de la relatividad.

Conductores no metálicos

- Polímeros conductores
 - Polímeros son dopados con componentes iónicos
 - $\rho = 10\text{--}1000 \mu\Omega \text{ cm}$
 - $\rho \rightarrow$ fuertemente dependiente del dopaje
 - **Dopaje**⁴: acto de agregar capas de átomos o moléculas a un material para modificar sus propiedades
 - Propiedades de flexibilidad, livianos y fáciles de manipular
 - Ejemplos: *polyacetylene*; *polyphenylene vinylene*; *polypyrrole*
- Conductores transparentes (en longitudes ópticas, i.e., $\lambda \approx 500\text{--}900 \text{ nm}$)
 - Ejemplos de solución sólida: $\text{SnO}_2 + \text{In}_2\text{O}_3$ (Indium-Tin-Oxide)
 - $\rho \approx 1 \Omega \text{ cm}$
 - Aplicaciones:
 - Pantallas planas
 - Celdas solares
 - Área de investigación: mediciones eléctricas de fenómenos producidos por luz

⁴Principal método experimental para crear superconductores.

Resumen de variables

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Conductividad eléctrica	<i>Electrical conductivity</i>	σ	S m^{-1}
Resistividad eléctrica	<i>Electrical resistivity</i>	ρ	$\Omega \text{ m}$
Fuerza por unidad de carga	<i>Force per unit charge</i>	\mathbf{f}	N C^{-1}
Movilidad eléctrica	<i>Electric mean free path</i>	μ	$\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
Tiempo de relajación	<i>Relaxation time</i>	τ_r	s
Resistencia eléctrica	<i>Electrical resistance</i>	R	Ω
Potencial eléctrico	<i>Electric potential</i>	V	V

Cuadro: Lista de variables relevantes y relacionadas con la ley de Ohm.

Resumen

- Materiales pueden ser conductores, dieléctricos o magnéticos
- Ley de Ohm (en materiales comunes): $J = \sigma \mathbf{E}$ (ecuación 7)
- La conductividad se mide en σ o en resistividad $\rho = \frac{1}{\sigma}$
- Densidad carga superficial y densidad de carga (volumétrica) son σ y ρ
- Capacitores están compuestos de dos o mas conductores y su capacitancia es solo debida a argumentos geométricos
- La resistividad es en esencia la resistencia al movimiento de cargas (μ movilidad eléctrica)
- Materiales conductores son una barrera para el campo eléctrico, no así el caso de dieléctricos
- Próxima clase: 1.2.2 materiales, sus propiedades e importancia: dieléctricos

Bibliografía

- Aguirre, C. A., Faúndez, J., Magalhães, S. G., & Barba-Ortega, J. 2022, Journal of Low Temperature Physics, 207, 85, doi: [10.1007/s10909-022-02701-3](https://doi.org/10.1007/s10909-022-02701-3)
- Casalbuoni, R. 2018, arXiv e-prints, arXiv:1810.11125. <https://arxiv.org/abs/1810.11125>
- Haynes, W. M. 2014, CRC Handbook of Chemistry and Physics
- Howell, S. B. 2006, Handbook of CCD Astronomy, Vol. 5
- Singh, S., Romero, A. H., Mella, J. D., et al. 2022, npj Quantum Materials, 7, 37, doi: [10.1038/s41535-022-00446-6](https://doi.org/10.1038/s41535-022-00446-6)