

Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 1. Principios de teoría electromagnética

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

8 de agosto 2023

 tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

1 Leyes fundamentales

- Definiciones
- Ley de Gauss
- Ley circuital de Ampère
- Comparación magnetostática y electrostática

2 Ecuaciones de Maxwell

- Introducción y notación
- Ley de Faraday
- Electrodinámica antes de Maxwell
- Ecuación de continuidad
- Formalismo de Maxwell
- Ecuaciones de Maxwell en el espacio libre
- Ecuaciones de Maxwell en materiales

3 Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell

- Condiciones de frontera
- Vector de Poynting

4 Resumen

5 Bibliografía



Figura: James Clerk Maxwell 1831–1879. Unificó las teorías eléctrica y magnética y formuló la actual descripción de ondas electromagnéticas.

Campos eléctricos y magnéticos

- Campo eléctrico \mathbf{E} V m^{-1} ó N C^{-1}
- Campo magnético \mathbf{B} T ó Wb m^{-2}
- Fuerza electromagnética de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

- \mathbf{F} fuerza, \mathbf{v} velocidad y q carga eléctrica

- Campos vectoriales auxiliares (medio lineal)

- Desplazamiento dieléctrico \mathbf{D}
- Intensidad magnética \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2)$$

- Permeabilidad magnética del vacío:
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
- Permitividad eléctrica del vacío:
 $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1}$

Atención!

- Cantidades vectoriales son **negrita**, i.e., $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z) = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$, en coordenadas cartesianas!
- En general, μ es la permeabilidad magnética en el *no* vacío, y es distinto al prefijo: 10^{-6} *micro*

Leyes fundamentales

- 2 Ley de Gauss: *El flujo total de \mathbf{E} desde un volumen \mathcal{V} es igual a la carga neta dentro de \mathcal{V}*

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau \quad (3)$$

Con la carga total Q la integral sobre el volumen de la densidad de carga (i.e., integral de un campo escalar sobre el volumen).

- A la carga encerrada la llamaremos Q_{enc} (o *enclosed*)
- Derivación: imaginemos una carga puntual, Q , al centro de coordenadas, luego calculamos su \mathbf{E} (slide 5)

Teorema

Teorema de la divergencia

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\tau = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (4)$$

Con V región del espacio cerrada, S su frontera, y \mathbf{v} un campo vectorial.

Derivación ley de Gauss

- Continuando ...

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left(r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

- Ecuación de Gauss integral:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} \quad (6)$$

- Usando el teorema de la divergencia:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau = \int \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau \quad (7)$$

- Ecuación de Gauss diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (8)$$

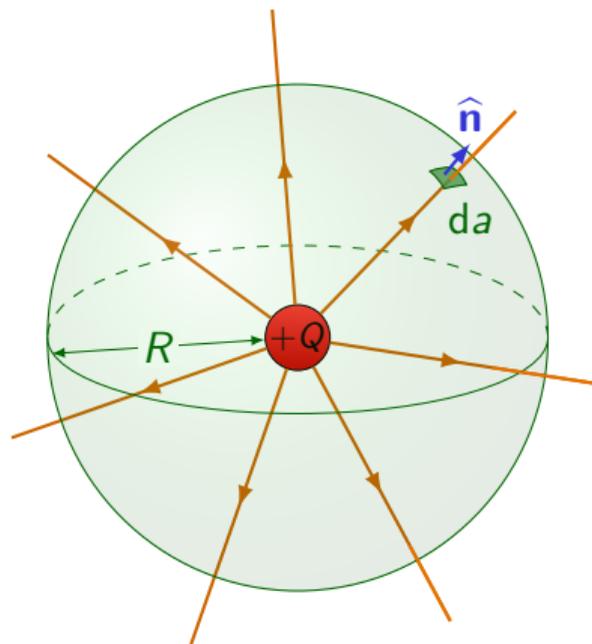


Figura: Ejemplo de esfera Gaussiana de radio R y carga $+Q$. El vector de superficie $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$.

Leyes fundamentales

3 Ley circuital de Ampère:

- Partiendo por la divergencia de la ley empírica de Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{s}}}{s^2} d\tau', \quad (9)$$

- Donde la ecuación establece la relación entre el campo magnético en un punto \mathbf{r} y la densidad de corriente (o distribución de carga) $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$
- Nótese que integramos sobre primas: $d\tau' = dx' dy' dz'$
- Aplicando el operador $\nabla \cdot$ a ambos lado de ecuación (9)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \int \nabla \cdot \mathbf{B} d\tau = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (10)$$

- (La divergencia y el rotor operan sobre las no primadas)
- También llamada ley de Gauss magnética

Leyes fundamentales

- Similarmente ahora vamos por el rotor: $\nabla \times \mathbf{B}$, se puede demostrar que:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \right) d\tau' = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

- Identidades útiles: $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{s})$, y $-(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} = (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2}$
- Solo para el caso de campo magnético estático: $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(t)$
- La corriente total pasando a través de la superficie (versión integral de Ampère):

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = I_{\text{enc}} \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (12)$$

- Regla de la mano derecha \rightarrow corriente positiva!
- Electrostático: Coulomb \rightarrow Gauss
- Magnetostático: Biot-Savart \rightarrow Ampère

Aplicación ley de Ampère estática

- Corriente I (o equivalentemente \mathbf{I}) a través de un cable derecho
- Para corriente que va en dirección z

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (13)$$

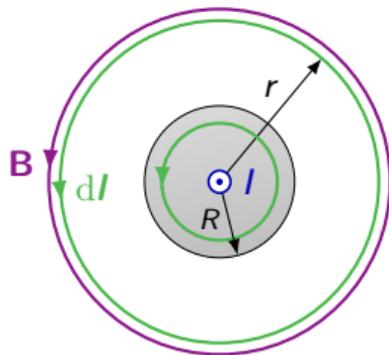


Figura: Vista frontal cable y campo magnético \mathbf{B} . El espesor del cable es R y la distancia a la cual se calcula es r según ecuación (13).

- $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$
- $d\mathbf{l} = dr\hat{r} + r d\hat{\phi} + dz\hat{z}$
- Forma diferencial de ley de Ampère (en siguiente slide)

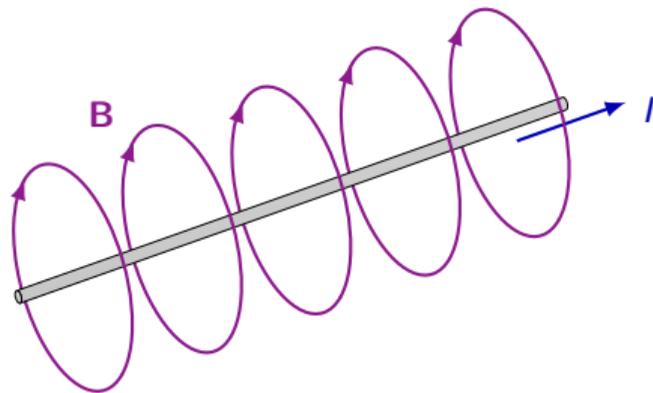


Figura: Vista lateral. Campo magnético generado por un cable que conduce una corriente I . El campo y la corriente poseen dirección saliendo de la página.

Comparación magnetostática y electrostática

- La divergencia y rotor en campos electrostáticos son (ecuaciones Maxwell en electrostática):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (15)$$

- Ambas ecuaciones (14) y (15) a la condiciones de borde ($\mathbf{E} \rightarrow 0$ lejos de las cargas), las determinan el campo, si la densidad de carga ρ es dada.
- La divergencia y rotor de un campo magnetostático son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{Ley de Ampère}) \quad (17)$$

- Nuevamente $\mathbf{B} \rightarrow 0$ lejos de toda corriente, las ecuaciones determinan el campo magnético.

Atención!

La pregunta de monopolos magnéticos está aún abierta! Física de partículas y teoría de inflación (Big Bang $\sim 10^{-36}$ s) los incorporan en sus cálculos.

Ecuaciones de electrodinámica

- Hasta aquí solo hemos estudiado casos estáticos, ecuaciones (14) a (17), (electro- y magneto-estática) cargas estacionarias y flujo de corriente constante
- Ahora consideraremos el caso más general: campos que dependen del tiempo con lo que consecuentemente se llega a la propagación de ondas electromagnéticas
- Usaremos la notación *boldface script* para denotar dependencia del tiempo, i.e., \mathcal{E}
- Los campos auxiliares D y H serán definidos en ecuaciones en materiales

Nombre	Name	Variable t	Estático	Unidad SI
Campo eléctrico	<i>Electric field intensity</i>	$\mathcal{E}(x, y, z, t)$	$\mathbf{E}(x, y, z)$	V m^{-1}
Campo eléctrico auxiliar	<i>Electric flux density</i>	$\mathcal{D}(x, y, z, t)$	$\mathbf{D}(x, y, z)$	C m^{-2}
Campo magnético	<i>Magnetic field intensity</i>	$\mathcal{B}(x, y, z, t)$	$\mathbf{B}(x, y, z)$	T or Wb m^{-2}
Campo magnético auxiliar	<i>Magnetic flux density</i>	$\mathcal{H}(x, y, z, t)$	$\mathbf{H}(x, y, z)$	A m^{-1}
Densidad de corriente	<i>Current density</i>	$\mathcal{J}(x, y, z, t)$	$\mathbf{J}(x, y, z)$	A m^{-2}
Densidad de carga	<i>Volume charge density</i>	$\rho(x, y, z, t)$	$\rho(x, y, z)$	C m^{-3}

Cuadro: Lista de elementos ecuaciones de Maxwell estáticos y variables en el tiempo.

Leyes fundamentales

1 Ley de Faraday: *Un campo magnético (\mathcal{B}) variable en el tiempo genera un campo eléctrico (\mathcal{E})*

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (18)$$

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times \mathcal{E} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (19)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (20)$$

Teorema

Teorema de Stokes, derivación completa en Griffiths (2017, Apéndice A.5)

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (21)$$

Inducción electromagnética

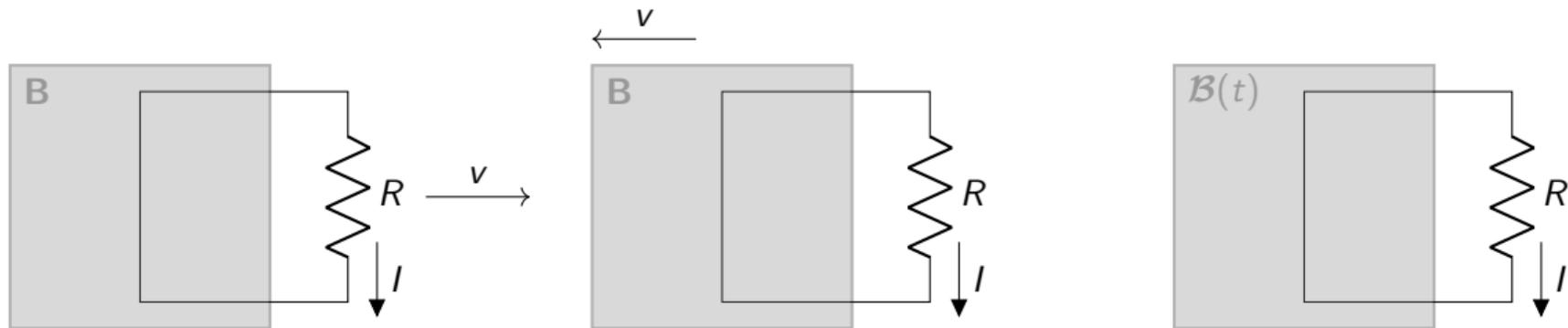


Figura: Izquierda a derecha: Un *loop* de alambre se mueve sobre un \mathbf{B} y genera un corriente I ; un imán con \mathbf{B} se mueve y genera una corriente I en el *loop* de alambre, finalmente un campo variable en el tiempo $\mathbf{B}(t)$ también genera una corriente I .

- Forma diferencial: $\nabla \times \mathcal{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- Forma integral: $\oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$

Ecuaciones de electrodinámica

- Las ecuaciones que representaban la electrodinámica del siglo pasado¹

$$(i) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \qquad (ii) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \qquad (22)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}) \qquad (iv) \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{J}} \quad (\text{Ley de Ampère}) \qquad (23)$$

- Ecuación (23) no cumple con la regla: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = 0$
- El operador termina en: $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \mu_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}}) \neq 0$ con $\boldsymbol{\mathcal{B}} \neq 0$
- La ley de Ampère no funciona fuera de argumentos de magnetostática
- Maxwell corrige la ecuación (23) con solo argumentos teóricos
- La solución está en la ecuación de continuidad, ecuación (26)
- La “sin nombre” es también llamada en español ley de Gauss magnética

¹El formalismo matemático de la época era distinto pero las ecuaciones representan lo mismo.

Ecuación de continuidad

- Conservación de carga global y local. *Si la carga total en algún volumen cambia, luego esa cantidad de carga pasó a través de la superficie*
- Sea el volumen \mathcal{V} de un cuerpo o límite que engloba a una o más cargas:

$$Q(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad (24)$$

y la corriente que pasa a través de la superficie \mathcal{S} es: $\oint \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a}$, luego la conservación de carga local dice:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} = - \int \nabla \cdot \mathcal{J} d\tau \Rightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int \nabla \cdot \mathcal{J} d\tau \quad (25)$$

Y como es verdadero para cualquier volumen \mathcal{V} ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{J} \quad (26)$$

- Aquí definimos la ecuación de continuidad —una expresión matemática que da cuenta la conservación local de carga.
- Esta ecuación puede ser derivada de las ecuaciones de Maxwell y es una *consecuencia* de las leyes de la electrodinámica

Ecuaciones de Maxwell

- Aplicando entonces la ecuación (26),

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathcal{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) \quad (27)$$

- Lo lo que faltaba para anular el término extra en ecuación (23) Ley de Ampère incompleta, luego:

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (28)$$

- Maxwell agregó correctamente el término pero por otros motivos²
- El término extra no afecta la estática de campos, razón por la cual solo fue derivada de forma teórica, pero sí es fundamental para la teoría de ondas electromagnéticas
- Además agrega simetría a las ecuaciones al igual que la ley de Faraday (slide 11), **un campo eléctrico que varía en el tiempo genera un campo magnético**
- En 1888 con el experimento de Hertz se confirmó la teoría de Maxwell

²Sus argumentos, además de incluir la continuidad usaba el místico éter (Bork 1963).

Ecuaciones de Maxwell

- Maxwell definió el término extra como **corriente desplazada**:

$$\mathcal{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (29)$$

- Pero el campo \mathcal{E} no tiene nada que ver con corriente \mathcal{J} !
- También es común referirse al término corriente total desplazada I_d (que nuevamente no es una corriente física)

$$I_d = \int \mathcal{J}_d \cdot da \quad (30)$$

Ejercicio

Un cable grueso de radio a transporta una corriente I , que se distribuye uniformemente a través de la *cross-section* del cable. En el cable existe un pequeño espacio (*gap*) que lo divide completamente con espesor $w \ll a$, formando así un capacitor de placas paralelas. Calcular el campo B en el gap a una distancia $r < a$.

Ecuaciones de Maxwell

- Finalmente podemos escribir de forma completa las **ecuaciones de Maxwell**

$$(i) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (31)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (32)$$

$$(iii) \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (33)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 (\boldsymbol{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\mathcal{J}}_d) \quad (\text{Ley de Ampère + corrección de Maxwell}) \quad (34)$$

- Junto a la fuerza de Lorentz (ecuación 1)
- Es posible derivar continuidad: $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, aplicando divergencia en (iv)
- El set (i) a (iv) no será dado en formulario**

Ecuaciones de Maxwell

- Es preferible escribir las ecuaciones en término de la fuente

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Ley de Faraday}) \quad (35)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (\text{Sin nombre}) \quad (iv) \quad \nabla \times \mathcal{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathcal{J} \quad (\text{Ley de Ampère})$$

- Donde (iv) incluye la corrección de Maxwell
- La existencia de campos se debe a fuentes de cargas y/o de corrientes.

Ejercicio

Muestre que el campo satisface las ecuaciones de Maxwell y determine ρ y \mathcal{J}

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \theta(vt - r) \hat{\mathbf{r}}; \quad \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \theta \equiv \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Espacio libre: $\rho = 0$ y $\mathcal{J} = 0$ (otra interpretación)

- En el espacio libre la simetría de campos se vuelve más evidente
- Nótese que las constantes μ_0 y ϵ_0 solo están presentes por el sistema de unidades SI.

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \qquad (iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\mu_0 \mathcal{J}_m - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \qquad (36)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = \mu_0 \rho_m \qquad (iv) \quad \nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \qquad (37)$$

- ρ_m y ρ_e representa la densidad de carga magnética y eléctrica
- \mathcal{J}_m y \mathcal{J}_e representa la densidad de corriente magnética y eléctrica
- Evidentemente ambas deben cumplir con la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathcal{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}, \quad y \quad \nabla \cdot \mathcal{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \qquad (38)$$

- Pero como sabemos $\rho_m = 0$ y $\mathcal{J}_m = 0$ i.e., razón por la cual no existen monopolos ([Goldhaber & Trower 1990](#))

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

- Dependiendo del problema a solucionar las ecuaciones de Maxwell pueden ser resueltas al usar su forma integral

$$(i) \quad \oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, d\tau \quad (iii) \quad \oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (39)$$

$$(ii) \quad \oint \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (iv) \quad \oint \mathcal{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (40)$$

- Es posible derivarlas desde los teoremas fundamentales del cálculo
- En las ecuaciones de superficie a volumen están calculadas en una superficie \mathcal{S} cerrada y un volumen \mathcal{V}
- En las ecuaciones de línea a superficie están calculadas en una línea \mathcal{C} cerrada y una superficie \mathcal{S}
- Nótese que la corriente neta está dada por la integral de la densidad de corriente (total, *free*, *bound*, desplazada, o de polarización; ver slide 24):

$$I \equiv \mathbf{I}(t) = \int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (41)$$

Unidades Gaussianas

Atención!

En electrodinámica (pero principalmente en teoría) las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en unidades Gaussianas, que **no son SI**. El lector debe tener en cuenta que uso de estas ecuaciones va a afectar las unidades y es recomendable usarlas solo si se está consiente de eso!

- El principio de las unidades Gaussianas se basa en que las constantes (con dimensión) ϵ_0 y μ_0 son absorbidas dentro de las mismas ecuaciones de Maxwell
- Este formalismo es por lo general usado en *high energy physics*, donde el campo eléctrico y magnético poseen las mismas unidades y así su formulación tensorial se vuelve más fácil

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = 4\pi\rho \qquad (iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \qquad (42)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \qquad (iv) \quad \nabla \times \mathcal{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi\mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) \qquad (43)$$

- 1 G corresponde a la unidad de campo magnético B , y es equivalente a 10^{-4} T

Polarización de materiales

- Qué pasa cuando un material dieléctrico es puesto sobre un \mathbf{E} ?
 - Compuesto de átomos neutros
 - Compuesto de moléculas polares \rightarrow torque en alineación al campo
- Luego el material se vuelve polarizado

$\mathbf{P} \equiv$ momento dipolar por unidad de volumen

- Con densidad de carga "atrapada" o *bound* por el material es:

$$\rho_b \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (44)$$

- La densidad de carga superficial, σ (que puede ser *free* o *bound*), está definida como:

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (45)$$

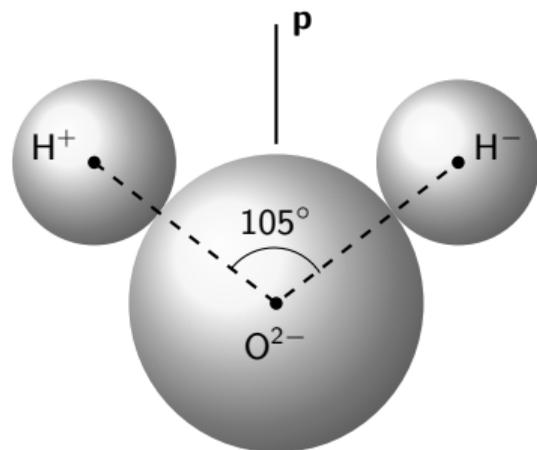


Figura: Molécula de agua. Posee un fuerte momento dipolar $6,1 \times 10^{-30}$ C m.

Ejercicio

Calcular el campo eléctrico que produce una esfera uniformemente polarizada de radio R .

Magnetización de materiales

- En presencia de un campo magnético materiales se vuelven magnetizados
- Contrario a \mathbf{E} que casi siempre la polarización apunta en la misma dirección que el campo, con \mathbf{B} hay tres posibles casos
- Paramagnético: magnetización paralela a \mathbf{B}
- Diamagnético: magnetización opuesta a \mathbf{B}
- Ferromagnético: materiales capaces de mantener la magnetización al ser removido del campo externo \mathbf{B}
- La polarización magnética esta descrita por:

$$\mathbf{M} \equiv \text{momento magnético dipolar por unidad de volumen} \quad (46)$$

- Similar a \mathbf{P} , y en general no nos preocuparemos como el material llegó a ser magnetizado
- La cantidad de corriente *bound* está dada por:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (47)$$

- Potencial magnético de una corriente superficial, κ (que puede ser *free* o *bound*)

$$\kappa_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (48)$$

Densidades de carga y corriente total

- La densidad de carga total (descrita en ecuaciones Maxwell) incluye los efectos de polarización del material (pero monopolos $\rho_m = 0$ no considerados), i.e.,

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathcal{P} \quad (49)$$

- Análogamente, la densidad de corriente también presenta los efectos magnéticos y de polarización³, i.e.,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_f + \mathcal{J}_b + \mathcal{J}_p = \mathcal{J}_f + \nabla \times \mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (50)$$

- Tomando la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathcal{P}); \quad \mathcal{D} \equiv \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \Rightarrow \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f \quad (51)$$

- Tomando la ley de Ampère con la corrección de Maxwell:

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \left(\mathcal{J}_f + \nabla \times \mathcal{M} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}; \quad \mathcal{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M} \Rightarrow \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (52)$$

³*b* corriente *bound* relacionada con magnetización del material y *p* con cambios en la polarización del material.

Resumen de variables de densidad y momentos

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Carga eléctrica	<i>Electric charge</i>	q	C
Densidad de carga lineal	<i>Linear charge density</i>	λ	C m^{-1}
Densidad de carga superficial	<i>Surface charge density</i>	σ	C m^{-2}
Densidad de carga (volumétrica)	<i>Charge density</i>	ρ	C m^{-3}
Corriente (eléctrica)	<i>Electric current</i>	I ó I	A
Densidad de corriente superficial	<i>Surface current density</i>	κ	A m^{-1}
Densidad de corriente (volumétrica)	<i>Current density</i>	\mathbf{J}	A m^{-2}

Cuadro: Lista de densidades de carga y de corriente.

- **P** momento dipolar por unidad de volumen (con dipolo eléctrico elemental **p**)
- **M** momento dipolar magnético por unidad de volumen (con dipolo magnético elemental **m**)
- subíndices (*subscripts*): *f* libre o *free*, *b* atrapada o *bound* (que depende del material), y *p* de polarización (originada por cambios en la polarización del material)

Transmisión en materiales

- Las ecuaciones de Maxwell (en slide 17) pueden ser aplicadas en cualquier condición, pero es favorable escribirlas en una forma más conveniente al tratar en materiales
- Las siguientes ecuaciones se derivan de propiedades de polarización eléctrica \mathcal{P} y magnetización \mathcal{M} de materiales, que son externos a campos \mathcal{E} y \mathcal{B} (desde un punto de vista macroscópico)

$$\mathcal{D} \equiv \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}, \quad y \quad \mathcal{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M} \quad (53)$$

- Llamados campos auxiliares: desplazamiento magnético \mathcal{D} e intensidad magnética \mathcal{H}
- \mathcal{D} y \mathcal{H} es lo que realmente medimos en el laboratorio!
- Para materiales sin una evidente polarización y magnetización:

$$\mathcal{D} \equiv \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}, \quad y \quad \mathcal{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M} \quad (54)$$

Ecuaciones de Maxwell en materiales

- Este set de ecuaciones no es por ninguna manera mas general que el definido en slide 17, solo hace una división de cargas y corriente de forma conveniente
- La desventaja es que poseen un aspecto híbrido con \mathcal{E} , \mathcal{D} y \mathcal{B} , \mathcal{H} presente al mismo tiempo en las Ecs.
- La solución a esto son un set adicional de ecuaciones constitutivas⁴ (propiedades del material)
- Nótese que en el espacio libre: $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{B}$

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (55)$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (56)$$

⁴No confundir con las relaciones constitutivas de la mecánica de sólidos.

Ecuaciones constitutivas

- Dados \mathcal{D} , \mathcal{H} en términos de \mathcal{E} y \mathcal{B} , la solución dependerá del material y su composición, para el caso de **medios lineales**:

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathcal{E} \qquad \mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}, \qquad (57)$$

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E} \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{\mu} \mathcal{B}, \qquad (58)$$

- Las constantes son: $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ y $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$, que será visto para materiales dieléctricos y magnéticos, susceptibilidad eléctrica y magnética, respectivamente
- Nótese que similar a la ciencia de materiales (e.g., *stress tensor* $[\sigma]$), materiales pueden ser o no isotrópicos
- Cristal de grafito, la corriente no se transporta similar en el material, y es necesario un tensor de rank-2 (3×3 matriz)
- Note que para medios lineales la corriente desplazada \mathcal{J}_d está relacionada con el desplazamiento eléctrico \mathcal{D} (de ahí su nombre):

$$\mathcal{J}_d \equiv \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \qquad (59)$$

Límite de las ecuaciones constitutivas

- Según ecuación (57), \mathcal{P} es proporcional a \mathcal{E} , y \mathcal{M} es proporcional a \mathcal{H} , lo que ocurre para muchos materiales cotidianos
- Este solo es el caso para campos eléctricos/magnéticos no tan fuertes
- Nótese que para el caso de la magnetización de un material:

$$\mathbf{M} \neq \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mathbf{B},$$

en vez de esto lo escribimos siempre en términos del campo \mathbf{H} ,

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}$$

- Las relaciones constitutivas dependerán del medio a analizar y no siempre serán correctas

Permeabilidad y permitividad

- **Permitividad** ϵ F m^{-1} : Es la medida de polarización eléctrica de un material dieléctrico
 - Un material con alta permitividad es capaz de polarizarse más en respuesta a un campo eléctrico externo, i.e., almacena una mayor cantidad de energía
 - Permitividad es una ecuación de estado de termodinámica
- **Permeabilidad** μ H m^{-1} : Magnetización que un material experimente al ser expuesto a un campo magnético externo
- Materiales homogéneos son los cuales cuentan con permitividad y permeabilidad constante y no varía respecto de su posición, o tiempo
- Materiales isotrópicos y anisotrópico dependen de su estructura, y su permeabilidad y permitividad resultante son constante o tensorial

Ecuaciones de Maxwell: medio lineal, isotrópico y homogéneo

- Para medios lineales, isotrópicos y homogéneos, las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (iii) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (60)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (iv) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (61)$$

- Donde hemos aplicado la ley de Ohm (que será vista en la próxima clase), $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$
- Donde el set de ecuaciones ahora solo depende de seis componentes \mathcal{E} y \mathcal{H}
- Nótese que el set no es aplicable a todas las situaciones, e.g., materiales ferromagnéticos
- Por lo general si es un set de ecuaciones que cumple con condiciones cotidianas

Transmisión en materiales en el mundo real

- Para materiales en el mundo “real”, la aproximación ecuación (53) de los campos auxiliares es raramente aplicable
- $\mathcal{D} \rightarrow$ buena aproximación lineal a temperaturas y energías de laboratorio $E \leq 10^{11} \text{ V m}^{-1}$
- $\mathcal{H} \rightarrow$ en temperaturas y en materiales comunes no funciona muy bien, el caso más simple, la curva de histéresis del hierro
- Incluso para casos lineales (i.e., $\mathcal{P} \propto \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \propto \mathcal{E}$, $\mathcal{M} \propto \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \propto \mathcal{B}$ set de ecuaciones constitutivas) existen complicaciones:
 - Para materiales homogéneos ϵ y μ son constantes en cualquier punto pero en inhomogéneos varían en (x, y, z) (en incluso en t)
 - Para materiales isotrópicos ϵ y μ son constantes y para anisotrópicos son tensores (e.g., debido a una estructura cristalina)
 - Materiales son por lo general dispersivos (al interactuar con radiación), por lo que ϵ y μ dependerán de la frecuencia, ν , de una onda electromagnética
- En el caso más general, materiales no lineales (e.g., *nonlinear optics*), $\mathcal{P} \not\propto \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \not\propto \mathcal{E}$, $\mathcal{M} \not\propto \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} \not\propto \mathcal{B}$, y pueden depender del tiempo t y otras variables físicas (temperatura, presión, etc)

Transmisión en materiales en el mundo real

- La descripción de teoría electromagnética funciona muy bien dentro de los límites clásicos y en el uso de materiales lineales y homogéneos
- Aproximaciones (perturbaciones) a materiales no lineales e inhomogéneos pueden también ser resultados de forma clásica (pero a un alto costo de cómputo)

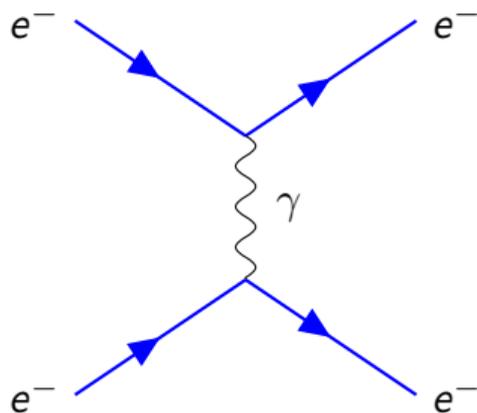


Figura: Diagrama de Feynman (*electron-electron scattering*), aplicación de teoría de grafos a problema QED.

- La teoría electromagnética es la única rama de la física que es posible expandirla en términos relativistas (*relativistic electrodynamics*) y cuánticos (*quantum electrodynamics*; QED)
- QED es la teoría relativista cuántica de la electrodinámica
- **QED es la teoría más exitosa del mundo!**
- Positrón un electrón que se mueve en sentido $-t$ (Feynman 1949)

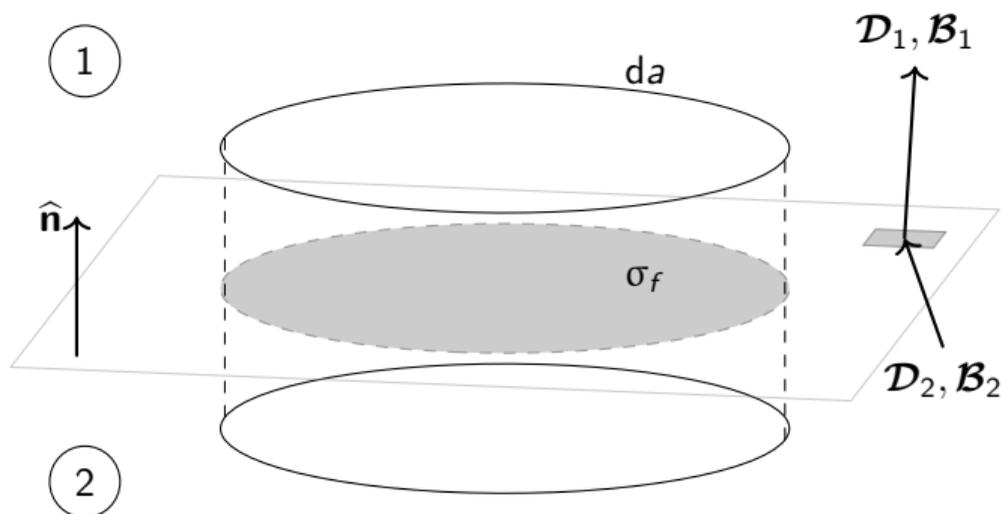
Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: condición de frontera

- Al pasar de un medio a otro los campos presentan discontinuidades, las cuales se pueden derivar a través de las ecuaciones de Maxwell
- Discontinuidad \leftrightarrow condiciones de frontera
- En la frontera son representadas por componentes tangencial y normal
- Similar naturaleza a una condición inicial de ecuación diferencial ordinaria (ODE)
- En general \mathcal{E} , \mathcal{B} , \mathcal{D} , y \mathcal{H} son discontinuos en algún punto de unión de dos medios
- Las discontinuidades pueden ser resultas por el set de ecuaciones de Maxwell en forma integral (en materiales)

$$(i) \oint \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f\text{enc}} \qquad (iii) \oint \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} \qquad (62)$$

$$(ii) \oint \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad (iv) \oint \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f\text{enc}} + \frac{d}{dt} \int \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} \qquad (63)$$

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: condición de frontera (\perp)



- De (i) eligiendo una porción Gaussiana pequeña (densidad de carga superficial libre $\sigma_f \neq \sigma_b$),

$$\mathcal{D}_1 \cdot \mathbf{a} - \mathcal{D}_2 \cdot \mathbf{a} = \sigma_f a \quad (64)$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_1^\perp - \mathcal{D}_2^\perp = \sigma_f \quad (65)$$

- De (ii), similarmente

$$\mathcal{B}_1^\perp - \mathcal{B}_2^\perp = 0 \quad (66)$$

Figura: Volumen infinitesimal para derivar condiciones de borde de componentes perpendiculares. El vector da es normal a la superficie del cilindro pero no necesariamente en la misma dirección que \hat{n} .

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: condición de frontera (||)

- De (iii) tomando un *loop* diferencial entre las dos superficies de materiales

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 \cdot \mathbf{l} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1^{\parallel} - \mathcal{E}_2^{\parallel} = 0 \quad (67)$$

- De (iv) similarmente al caso anterior (corriente superficial libre $\kappa_f \neq \kappa_b$)

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 \cdot \mathbf{l} - \boldsymbol{\mathcal{H}}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{f_{\text{enc}}} \quad (68)$$

- Con $\hat{\mathbf{n}}$ un vector unitario perpendicular a la interfaz entre 1 y 2, tal que $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}$ es normal a un *loop* de Ampère

$$I_{f_{\text{enc}}} = \boldsymbol{\kappa}_f \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{l}) = (\boldsymbol{\kappa}_f \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_1^{\parallel} - \mathcal{H}_2^{\parallel} = \boldsymbol{\kappa}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (69)$$

- Los componentes paralelos de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ son discontinuos y proporcionales a la cantidad $\boldsymbol{\kappa}_f$

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: condición de frontera (||)

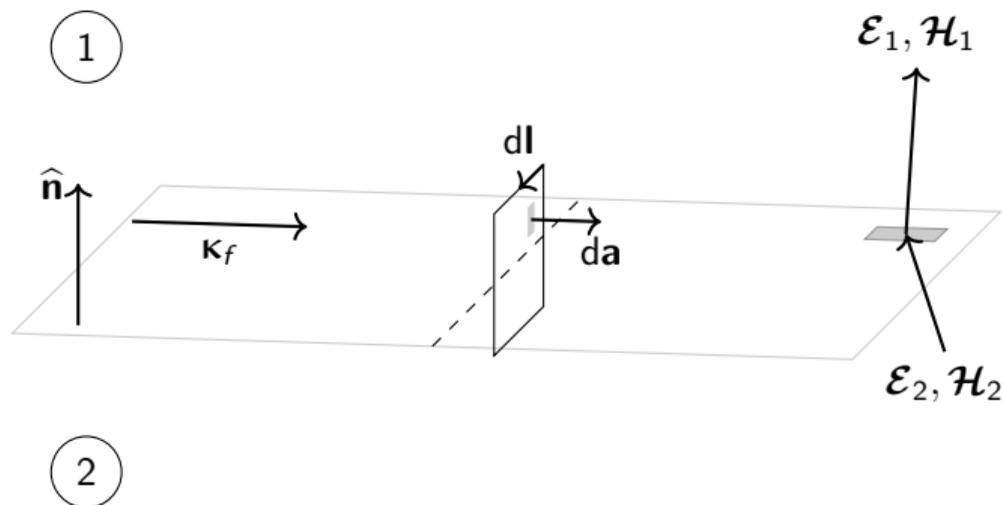


Figura: Loop cerrado infinitesimal para derivar las condiciones de borde con componentes paralelas. Nótese que el vector $d\mathbf{l}$ es el diferencial de línea y que es una curva cerrada.

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: condición de frontera (medio lineal)

- En caso de un **medio lineal** las ecuaciones de frontera se vuelven:

$$(i) \quad \epsilon_1 \mathcal{E}_1^\perp - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^\perp = \sigma_f$$

$$(iii) \quad \mathcal{E}_1^\parallel - \mathcal{E}_2^\parallel = 0 \quad (70)$$

$$(ii) \quad \mathcal{B}_1^\perp - \mathcal{B}_2^\perp = 0$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathcal{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathcal{B}_2^\parallel = \kappa_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (71)$$

- En caso particular de no existir corriente libre ni carga libre en la interfaz, tenemos que:

$$(i) \quad \epsilon_1 \mathcal{E}_1^\perp - \epsilon_2 \mathcal{E}_2^\perp = 0$$

$$(iii) \quad \mathcal{E}_1^\parallel - \mathcal{E}_2^\parallel = 0 \quad (72)$$

$$(ii) \quad \mathcal{B}_1^\perp - \mathcal{B}_2^\perp = 0$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathcal{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathcal{B}_2^\parallel = 0 \quad (73)$$

- Estas ecuaciones serán usadas en teoría de reflexión y refracción (ondas armónicas)
- Dependiendo de la orientación de $\hat{\mathbf{n}}$ la resta en ecuación (iv) puede variar

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: vector de Poynting

- Recordando el trabajo realizado para reunir/ensamblar una distribución de cargas, y de manera análoga para un campo magnético (o ensamblar en fme)

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathcal{E}^2 d\tau; \quad W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathcal{B}^2 d\tau \quad (74)$$

- W_e : Lo que trabaja contra la repulsión de la fuerza de Coulomb \mathbf{F}
- W_m : El trabajo necesario para hacer que corriente fluya
- Luego la energía total que almacenan los campos electromagnéticos es:

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^2 \right) d\tau. \quad (75)$$

- Otra derivación en términos de la conservación de energía, ¿Cuál es el trabajo realizado en un dt ?

$$\mathcal{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}) \cdot \mathbf{v} dt = q\mathcal{E} \cdot \mathbf{v} dt \quad (76)$$

$$\frac{dW}{dt} = \int (\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}) d\tau, \quad \text{con } q = \rho d\tau, \quad \rho\mathbf{v} = \mathcal{J} \quad (77)$$

- $\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}$: Trabajo realizado por unidad de tiempo por unidad de volumen

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: vector de Poynting

- Tomamos ecuación (iv) Ampère más la corrección de Maxwell (para eliminar la variable \mathcal{J})

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (78)$$

- Para resolver ecuación (78) hacemos uso de las propiedades y ecuación (iii):

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \quad (\text{regla del producto}) \quad (79)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{B}^2), \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}^2) \quad (\text{matemática}) \quad (80)$$

- Entonces,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (81)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[-\boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \right] - \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (82)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \quad (83)$$

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: vector de Poynting

- Luego solo reemplazamos en la ecuación (77) de trabajo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint (\mathcal{E} \times \mathcal{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (84)$$

- La primera integral nos da cuenta de la energía almacenada en los campos electromagnéticos y la segunda integral es el ritmo al cual la energía del volumen V es transportada hacia su superficie S .

Teorema

Del teorema de energía y trabajo en campos \mathcal{E} y \mathcal{B} . *El trabajo realizado sobre las cargas por una fuerza electromagnética es igual a la energía almacenada en los campos menos la energía que es transportada hacia la superficie.*

La energía por unidad de tiempo por unidad de área transportada por los campos es llamada: **vector de Poynting**:

$$\mathcal{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathcal{E} \times \mathcal{B}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} - \oint \mathcal{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (85)$$

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: vector de Poynting

- De forma análoga, al realizar trabajo en cargas estas responderán con un aumento de su energía mecánica

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int u_{\text{mech}} d\tau \quad (86)$$

- u_{mech} : *mechanical energy density*, análoga a u_{em} (ecuación 75 sin su integral): *energy density* de los campos eléctrico y magnético

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^2 \right) \quad (87)$$

- Luego reemplazando en ecuación (85)

$$\frac{d}{dt} \int (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) d\tau = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau \quad (88)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (89)$$

- Forma diferencial del teorema de Poynting

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: vector de Poynting

- Nótese la similitud del teorema diferencial de Poynting con la ecuación (26) (continuidad):

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathcal{S} \quad (90)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{J} \quad (91)$$

- Es decir el flujo de energía es definido exactamente igual a el flujo de carga
- Ecuaciones de Poynting descritas hasta aquí son generales i.e., no están en un medio en particular
- Similarmente desde ecuaciones (iii) y (iv) en materiales, podemos describir el teorema de Poynting

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: Poynting en medio lineal

- Nuevamente partimos de la variable de interés $\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}$ (i.e., potencia disipada de una resistencia), usamos un truco matemático: $\mathcal{E} \cdot (\text{iv}) - \mathcal{H} \cdot (\text{iii})$, con (iii) y (iv) las ecuaciones de Maxwell en materiales

$$\mathcal{E} \cdot (\nabla \times \mathcal{H}) - \mathcal{H} \cdot (\nabla \times \mathcal{E}) = \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \quad (92)$$

- Con lo que tenemos que:

$$\nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0 \quad (93)$$

- Ahora usando las ecuaciones constitutivas (en especial el set ecuaciones 57), podemos decir que:

$$\mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 \right), \quad \text{y} \quad \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \right) \quad (94)$$

- Entonces el teorema de Poynting en materiales para un medio lineal:

$$\nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \right) = 0 \quad (95)$$

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: Poynting en medio lineal

- Entonces generalizando:

$$\nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \right) = 0 \quad (96)$$

$$\oint (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \cdot d\mathbf{H} + \int \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\mathcal{E} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{H} \cdot \mathcal{B}) d\tau = 0 \quad (97)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{S} + \mathcal{E} \cdot \mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) = 0 \quad (98)$$

- $\mathcal{S} \equiv \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ en unidades de W m^{-1} , ojo que en campos expresados en la parte real de un complejo existirá un conjugado de $\overline{\mathcal{H}}$
- $\mathcal{E} \cdot \mathcal{J}$ la disipación de energía
- w_e, w_m trabajo o energía eléctrica y magnética por unidad de volumen

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2, \quad \text{y} \quad w_m = \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \quad (99)$$

- Más aplicaciones de estas ecuaciones en ondas electromagnéticas

Aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell: resumen de variables

Nombre	Name	Símbolo	Unidad SI
Energía eléctrica	<i>Electric energy</i>	W_e	J
Energía eléctrica por unidad de volumen	<i>Electric energy per unit volume</i>	w_e	J m^{-3}
Energía magnética	<i>Magnetic energy</i>	W_m	J
Energía magnética por unidad de volumen	<i>Magnetic energy per unit volume</i>	w_m	J m^{-3}
Energía potencial electromagnética	<i>Potential energy</i>	U_{em}	J
Energía potencial electromagnética por unidad de volumen	<i>Electromagnetic potential energy per unit volume</i>	u_{em}	J m^{-3}
Energía potencial mecánica por unidad de volumen	<i>Mechanic potential energy per unit volume</i>	u_{mech}	J m^{-3}
Vector de Poynting	<i>Poynting vector</i>	\mathcal{S}	W m^{-1}

Cuadro: Lista de variables en aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell.

Resumen

- Vimos un resumen de las leyes fundamentales: Lorentz, Ampère, Biot-Savart (indirectamente Coulomb), Faraday y Gauss (aunque es más un principio matemático), pero quedamos pendientes con la ley de Ohm
- Expandimos en las ecuaciones de Maxwell (i.e., incluimos la corrección a la ley de Ampère) y como usarlas en un medio material y un medio material lineal, homogéneo e isotrópico
- Brevemente expandimos en materiales y su composición física: materiales lineales y no lineales (*nonlinear*), y materiales homogéneos (isotrópicos y anisotrópicos)
- Aplicaciones de ecuaciones de Maxwell, en particular aplicaciones de frontera y Poynting (energía electromagnética)
- Próxima clase: 1.2.1 materiales, sus propiedades e importancia: conductores

Bibliografía

Bork, A. M. 1963, American Journal of Physics, 31, 854, doi: [10.1119/1.1969140](https://doi.org/10.1119/1.1969140)

Feynman, R. P. 1949, Physical Review, 76, 749, doi: [10.1103/PhysRev.76.749](https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.749)

Goldhaber, A. S., & Trower, W. P. 1990, American Journal of Physics, 58, 429, doi: [10.1119/1.16474](https://doi.org/10.1119/1.16474)

Griffiths, D. J. 2017, Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. (Prentice Hall)