

Electromagnetismo Aplicado

Unidad 0: 1. Cálculo vectorial y herramientas matemáticas

Prof. Tomás Cassanelli

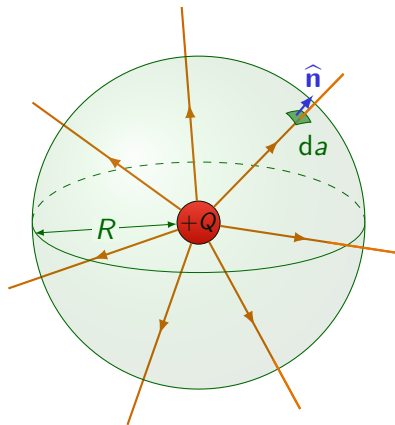
Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

7 de agosto 2023

✉ tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

- 1 Álgebra vectorial
- 2 Cálculo diferencial
- 3 Cálculo integral
- 4 Teoremas fundamentales del cálculo
- 5 Coordenadas
- 6 Delta Dirac
- 7 Teoría de campos vectoriales
- 8 Número complejo
- 9 Resumen
- 10 Bibliografía



Operaciones vectoriales

- **Desplazamientos** poseen *dirección* y *magnitud*
- **Escalares** poseen solo *magnitud*
- Vectores, escritos en **negrita**, $\mathbf{A}$, poseen magnitud $\|\mathbf{A}\| = A$

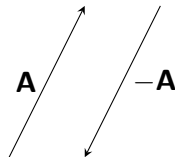


Figura: El largo de la línea es proporcional a la magnitud del vector, y la flecha (o cabeza), el sentido. Note que $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{-A}\| = A$.

Atención!

Cantidades vectoriales serán escritas con **bold** o **negrita**. Durante el curso y la notación que utilizaremos no tendrá $\vec{A}$, para el caso de cálculos con lápiz y paper si recomendamos esa notación.

Vectores en tres dimensiones

- Vector $\mathbf{A}$ (no usaremos notación $\vec{A}$ para evitar sobrecargar la notación, pero durante exámenes si es necesario!)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z) = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \quad (1)$$

- Módulo de $\|\mathbf{A}\| = A$

$$\|\mathbf{A}\| = A = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2} \quad (2)$$

- Vector unitario $\|\hat{n}\| = n = 1$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \quad (3)$$

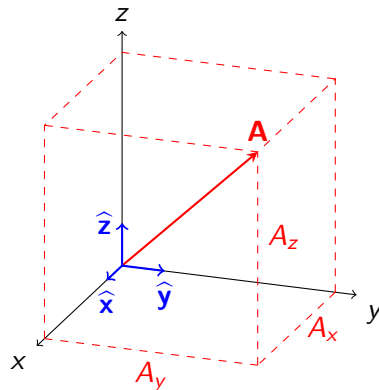


Figura: Proyección cartesiana $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$.

Definiciones vectoriales

Las operaciones vectoriales se clasifican en:

1 Adición de dos vectores

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (4)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad (5)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (6)$$

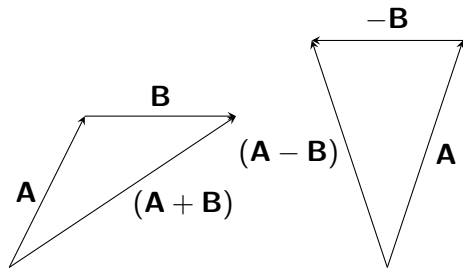


Figura: Suma y resta vectorial gráfica.

2 Multiplicación de un escalar

$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B} \quad (7)$$

Operaciones vectoriales

3 Producto punto ($\cdot$) de dos vectores

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta, \quad (8)$$

donde θ es el ángulo del comienzo de cada vector. El producto punto es conmutativo, i.e., $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

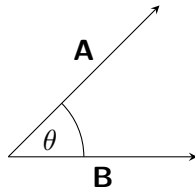


Figura: Producto punto.

Ejemplo

Sea $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, calcular el producto punto $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$. Solución:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

o equivalentemente la *ley de cosenos*

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

Operaciones vectoriales

4 Producto cruz ($\times$) de dos vectores

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv AB \sin \theta \hat{\mathbf{n}}, \quad (9)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$, $n = \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$ vector unitario, corresponde a el vector perpendicular a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. Equivalentemente $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (10)$$

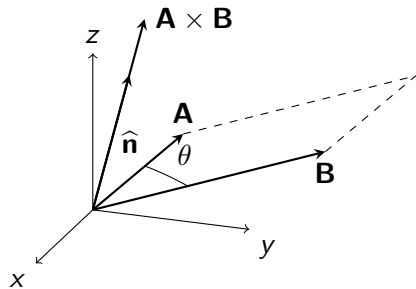


Figura: Visualization of cross product $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Posición, desplazamiento y vector de separación

- Posición: La ubicación de un punto en coordenadas cartesianas es (x, y, z) , luego su vector posición es:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (11)$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}} \quad (12)$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad \hat{\mathbf{s}} \equiv \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (13)$$

- Vector de fuente (*source point*) es $\mathbf{r}$
- Vector de campo (*field point*) es $\mathbf{r}'$
- Vector de separación: $\hat{\mathbf{s}}$
- Desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{l}$ (elemento de línea)

$$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}} \quad (14)$$

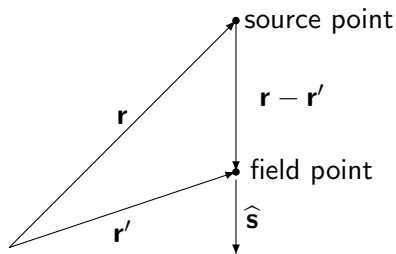


Figura: Source point, donde la fuente se ubica. Field point, donde el campo es medido.

Transformación de vectores

- El sistema coordenado de vectores es totalmente arbitrario
- T es una transformación lineal que aplica sobre un vector $\mathbf{a}$ de n elementos: $T(\mathbf{A}) = [\mathbf{R}] \mathbf{A}$
- $[\mathbf{R}]$ es llamada la matriz de transformación:

$$T(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

- De aquí nace la notación tensorial (quizá al final del curso, e.g., field tensor: $F^{\mu\nu}$)

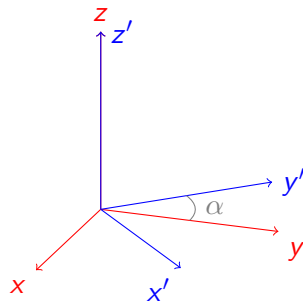


Figura: Transformación de la base $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$. La rotación es solo efectuada con una matriz $[\mathbf{R}]$ de 2×2 .

- En este caso la matriz de rotación es:

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (16)$$

Campo vectorial

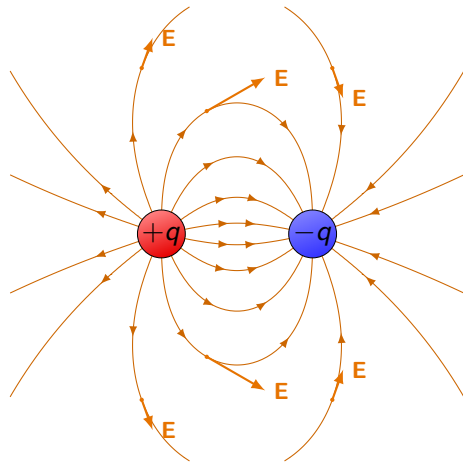


Figura: Ejemplo electrostático. Líneas de campo vectorial eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

- Campo vectorial, función $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que asigna a cada valor de $\mathbf{r}$ un único valor $\mathbf{G}(\mathbf{r})$
- Ley de Coulomb

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{s^2} \hat{\mathbf{s}} \quad (17)$$

- Q la carga de prueba, $\mathbf{r}$ el vector posición, y $\hat{\mathbf{s}}$ el vector de separación
- Campo eléctrico $\mathbf{E} = \frac{1}{Q} \mathbf{F}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{s_i^2} \hat{\mathbf{s}}_i \quad (18)$$

- $\mathbf{E}$ tangencial a las líneas de campo

Gradiente

- Campo escalar (e.g., temperatura T) a cantidad vectorial
- Gradiente de T , $\text{grad}(T)$ o ∇T (en coordenadas cartesianas)

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (19)$$

- El gradiente ∇T apunta en la dirección de máximo crecimiento del campo escalar T
- La magnitud del vector $\|\nabla T\|$ entrega la pendiente del máximo crecimiento

$$dT = \nabla T \cdot d\mathbf{l} = \|\nabla T\| \|d\mathbf{l}\| \cos \theta \quad (20)$$

- Operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, operador vectorial que actúa en T , y **no** multiplica

Ejemplo

Encontrar el gradiente de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (magnitud del vector posición). Solución: $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$.

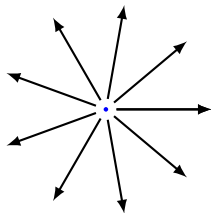
Divergencia

- Desde la definición de operador ∇ , pero ahora actuando en un campo vectorial

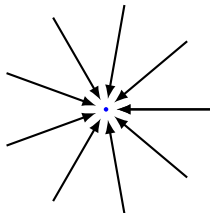
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}) \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (22)$$

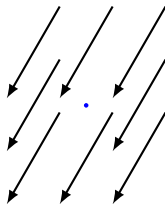
- La divergencia de un campo vectorial es un escalar
- La divergencia de un campo escalar es sin sentido!



$$\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

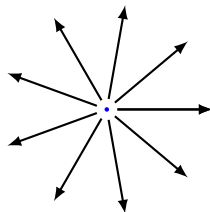
Figura: La divergencia mide cuanto una cantidad vectorial *diverge* de un punto en cuestión.

Rotor o curl

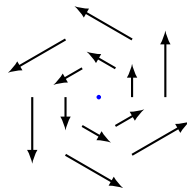
- De la definición del operador ∇ y producto cruz:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (23)$$

- El rotor de un campo vectorial $\mathbf{v}$ es otro campo vectorial
- El rotor de un escalar es sin sentido!
- Medida de *cuanto gira el vector* $\mathbf{v}$ en un punto en cuestión



$$\nabla \times \mathbf{v} = 0$$



$$\nabla \times \mathbf{v} = \odot$$

Gradiente, divergencia y rotor

Ejercicio

- Calcular la divergencia y rotor de las siguientes funciones:

- $\mathbf{v}_a = x^2\hat{\mathbf{x}} + 3xz^2\hat{\mathbf{y}} - 2xz\hat{\mathbf{z}}$

- $\mathbf{v}_b = (xy, 2yz, 3zx)$

- $\mathbf{v}_c = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$

- Hacer un bosquejo del campo escalar $v = \frac{\hat{r}}{r^2}$.
- Construir un campo vectorial que tenga divergencia y rotor cero (además de una constante!)
- Probar que la relación:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (24)$$

para las funciones $\mathbf{A} = (x, 2y, 3z)$ y $\mathbf{B} = (3y, -2x, 0)$

Segundas derivadas y sus propiedades

- 1 Divergencia del gradiente: $\nabla \cdot (\nabla T)$ El operador *Laplacian* $\nabla^2 T = \nabla \cdot (\nabla T)$
- El laplaciano de un escalar es un escalar
 - El laplaciano de un campo vectorial (es el laplaciano de sus componentes), i.e.,

$$\nabla^2 \mathbf{v} \equiv (\nabla^2 v_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 v_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 v_z) \hat{\mathbf{z}} \quad (25)$$

- 2 Rotor del gradiente: $\nabla \times (\nabla T) = 0$
- 3 Gradiente de la divergencia: $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$
- No es lo mismo al laplaciano de un vector:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} \neq \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (26)$$

- 4 Divergencia del rotor: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$
- 5 Rotor del rotor: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$

Nota

Solo existen dos tipos de derivadas, *Laplaciano* y *gradiente de la divergencia* (que es muy raro), para aplicaciones en electromagnetismo.

Integrales de línea, superficie (área) y volumen

- 1 Integral de línea del punto a a b , con elemento diferencial de línea $d\mathbf{l}$ y sobre un campo vectorial $\mathbf{v}$

$$\int_a^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (27)$$

- En el caso $a = b \Rightarrow \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$
 - Ejemplo, el trabajo $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$
 - Existen dos tipos de vectores, aquellos que dependen en el camino y otros independientes y que solo depende del inicio y fin (*campo conservativo*)
- 2 Integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{v}$ sobre un parche de área infinitesimal $d\mathbf{a}$ con dirección perpendicular a la superficie

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (28)$$

- Superficies *abiertas* poseen signo ambiguo
- Superficies cerradas poseen $d\mathbf{a}$ positivo en dirección hacia afuera (*outwards*) y negativo en dirección hacia adentro (*inwards*)
- Una integral de superficie cerrada $\Rightarrow \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$
- ¡Existen vectores que son independientes de la superficie!

Integrales de línea, superficie (área) y volumen

3 Integral de volumen de un escalar T en una porción infinitesimal de volumen $d\tau$: $\int_V T d\tau$

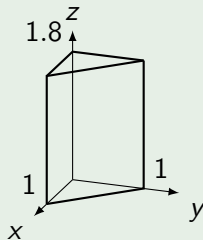
- En coordenadas cartesianas $d\tau = dx dy dz$
- T puede ser la densidad (que varía de punto a punto) y su integral es la masa
- Campos vectoriales también pueden ser calculados:

$$\int \mathbf{v} d\tau = \hat{\mathbf{x}} \int v_x d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int v_y d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int v_z d\tau \quad (29)$$

Ejercicio

- Calcular la integral de volumen $T = xyz^2$ sobre el prisma
- Solución:

$$\iiint (xyz^2) dx dy dz = \int_0^{1.8} z^2 \left\{ \int_0^1 y \left[\int_0^{1-y} x dx \right] dy \right\} dz$$



Teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea $f(x)$ una función diferenciable, entonces

$$\int_b^a \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (30)$$

La integral de una derivada sobre un intervalo está dada por la función evaluada en los puntos de contorno. Existen tres teoremas que derivan del gradiente, divergencia y rotor.

Teorema

Teorema fundamental del gradiente, simplemente expandiendo el teorema fundamental del cálculo a integrales de línea,

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot d\mathbf{l} = T(b) - T(a) \quad (31)$$

con a y b puntos extremos, o frontera.

Teorema de la divergencia

Teorema

Teorema de la divergencia, o teorema de Gauss, o teorema de Green,

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau = \oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \quad (32)$$

en otras palabras, el teorema dice:

$$\int (\text{flujo en un volumen}) \equiv \oint (\text{flujo que atravieza la superficie})$$

Nótese que el volumen en cuestión debe ser cerrado.

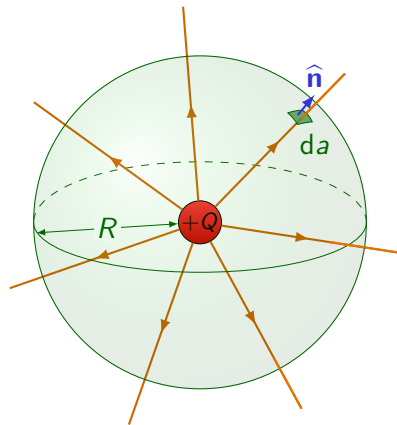


Figura: Ejemplo de esfera Gaussiana. La carga $+Q$ emite un campo constante a través de la superficie esférica de vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ y elemento diferencial de área $d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}} da$.

Teorema del rotor

Teorema

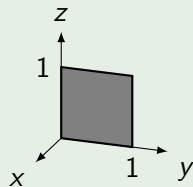
Teorema de curl, o teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{v}_P \cdot d\mathbf{l} \quad (33)$$

donde S es la superficie, y P la línea o contorno de la superficie S .

Ejemplo

- Sea $\mathbf{v} = (0, 2xz + 3y^2, 4yz^2)$, comprobar el teorema de Stokes asociado a la figura y con orientación antihoraria (de la cara visible).
- Solución: $\int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{4}{3}$



Coordenadas cilíndricas

- Arfken & Weber (1967)
- Coordenadas: (r, ϕ, z)
- r : distancia al eje z
- ϕ : ángulo polar
- z : altura
- $\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$
- In terms of the cartesian unit vectors:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (34)$$

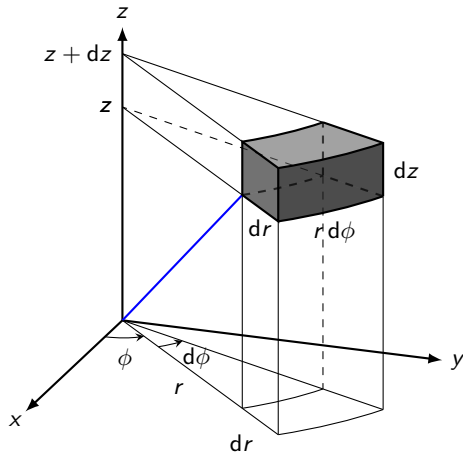


Figura: Elemento diferencial en coordenadas cilíndricas.

Coordenadas cilíndricas

- Desplazamiento infinitesimal:

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\phi\hat{\phi} + dz\hat{\mathbf{z}} \quad (35)$$

- Volumen infinitesimal:

$$d\tau = r dr d\phi dz \quad (36)$$

- Gradiente:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (37)$$

- Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (38)$$

- Rotor:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (39)$$

Coordenadas esféricas

- Coordenadas: (r, θ, ϕ)
- r : distancia desde el origen y magnitud del vector posición $\|\mathbf{r}\| = r$
- ϕ : ángulo polar
- θ : ángulo azimutal
- $\mathbf{A} = A_r \hat{\mathbf{r}} + A_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- In terms of the cartesian unit vectors:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\quad (40)$$

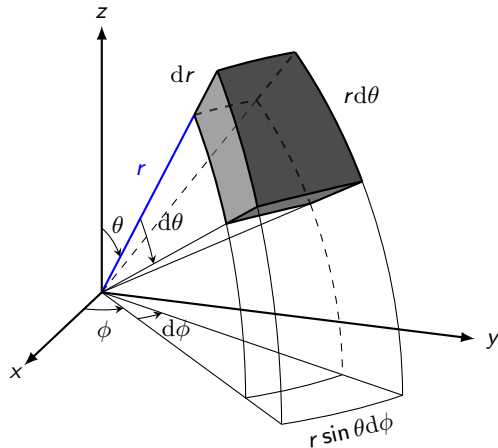


Figura: Elemento diferencial en coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas

- Desplazamiento infinitesimal:

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (41)$$

- Volumen infinitesimal:

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (42)$$

- ¡ La superficie infinitesimal dependerá de la orientación! (y aplica para cualquier coordenada)

- Gradiente:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (43)$$

- Divergencia:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \end{aligned} \quad (44)$$

- Rotor:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (45)$$

Función Delta Dirac

- Considere la divergencia del vector: $\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$
- ¡ $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$!
- Aplicando el teorema de la divergencia (asumiendo una esfera de radio R):

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int \left(\frac{1}{R} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left(R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \right) = 4\pi \quad (46)$$

Atención

Toda contribución de la divergencia entonces debe venir solo de un punto ubicado en $r = 0$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{v}$ posee un valor *cero* en todo punto del espacio excepto en $r = 0$! Objeto matemático-físico Delta Dirac.



Figura: Paul Dirac (Nobel Lauret). Desarrolló la relatividad cuántica y predijo la existencia del positrón.

Función Delta Dirac

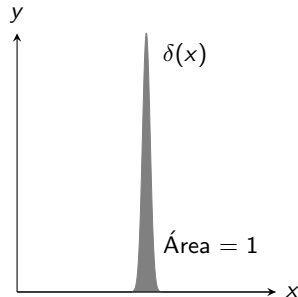
- Función Delta Dirac en una dimensión:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0, \\ \infty & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (47)$$

- Propiedades de una función continua:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (48)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a) \quad (49)$$



Ejercicio

Pruebe que:

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x), \quad (50)$$

donde k es una constante ($\neq 0$), en particular $\delta(-x) = \delta(x)$.

Figura: Delta Dirac $\delta(x)$. El área ha sido incluida de forma exagerada y es sólo una representación. Porción de área infinitesimal.

Función Delta Dirac en más de una dimensión

- Generalización multidimensional:

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (51)$$

- Nuevamente integral de volumen igual a 1:

$$\int_{\text{todo el espacio}} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \iiint \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz \quad (52)$$

- Recordando el cuadro de *Atención* anterior (slide 25). Precisamente la definición de Delta Dirac es:

$$\nabla \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{s}) \quad (53)$$

Recordando que $\mathbf{s} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, y que la diferenciación solo aplica en $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}'$ es constante)

- Otros cálculos útiles son:

$$\nabla \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{s}}}{s^2} \quad y \quad \nabla^2 \frac{1}{s} = -4\pi\delta^3(\mathbf{s}) \quad (54)$$

Teoría de campos vectoriales

Teorema

El teorema de Helmholtz. Desde Faraday los vectores de campo eléctrico y campo magnético fueron independientes, pero Maxwell los unió a una sola teoría. Esto conllevó una importante formulación matemática: Sea la divergencia de $\mathbf{F}$ (un campo $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$) igual a un campo escalar D ,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D, \quad (55)$$

Y el rotor de $\mathbf{F}$ igual a un campo vectorial $\mathbf{C}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (56)$$

Luego por consistencia, $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$. Puedes entonces determinar $\mathbf{F}$? La respuesta es **no**. El problema se resuelve con las condiciones de borde apropiadas.

Demostración del teorema en [Griffiths \(2017\)](#) apéndice B.

Potenciales

Campos irrotacionales (*curl-less*)

Si el rotor de un campo vectorial $\mathbf{F}$ es cero en todo el espacio, entonces $\mathbf{F}$ puede ser descrito por un **potencial escalar** V

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{F} = -\nabla V \quad (57)$$

- 1 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en todo el espacio
- 2 $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ es independiente del camino y puntos coordenados
- 3 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$ para un loop cerrado
- 4 $\mathbf{F}$ es el gradiente para un escalar, $\mathbf{F} = -\nabla V$

Nótese que el escalar V no es único, cualquier constante puede ser agregada a V ya que esto no afectará al gradiente

Potenciales

Campos solenoidales (*divergence-less*)

Si la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ es cero en todo el espacio, luego $\mathbf{F}$ puede ser expresada como el rotor de un campo potencial vectorial $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (58)$$

- 1 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ en todo el espacio
- 2 $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$ es independiente de la superficie, para cualquier línea de contorno
- 3 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0$ para cualquier superficie cerrada
- 4 $\mathbf{F}$ es el rotor de un vector, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$

Notación compleja

- Casi todos los sistemas físicos que es posible expresarlos a través de energía presentan una dependencia en la frecuencia, y es posible expresarlos a través de ondas sinusoidales
- En electromagnetismo son llamados campos armónicos
- Esto resulta en:

$$A \cos(\omega t + \phi) \quad (59)$$

- A, ω, ϕ ; amplitud, frecuencia angular (o simplemente frecuencia) y fase angular
- Definición matemática de $e = 2,718\,28\dots$

$$\begin{aligned} e^{\phi} &= 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^3}{3!} + \dots \\ e^{j\phi} &= 1 + j\phi - \frac{\phi^2}{2!} - j\frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \dots \\ e^{j\phi} &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} \dots\right) + j \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} \dots\right) \\ e^{j\phi} &= \cos \phi + j \sin \phi, \quad \text{con } j \equiv (-1)^{0,5} \end{aligned} \quad (60)$$

Notación compleja

- Ec. (59) puede ser expresada en términos de un número complejo cualquiera, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{A} = A_r + jA_i, \quad \text{con} \quad A_r \equiv \text{Re}[\mathcal{A}], \quad A_i \equiv \text{Im}[\mathcal{A}] \quad (61)$$

- Podemos mostrar que:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \left[A e^{j(\omega t + \phi)} \right] = \text{Re} \left[A e^{j\phi} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\mathcal{A} e^{j\omega t} \right] = A_r \cos \omega t - A_i \sin \omega t, \quad (62)$$

$$\text{con} \quad \mathcal{A} = A e^{j\phi} = A \cos \phi + jA \sin \phi = A_r + jA_i \quad (63)$$

- Luego, $A_r \equiv A \cos \phi$ y $A_i \equiv A \sin \phi$
- Esta notación es también llamada *representación fasorial* (*phasor*)

Atención

En libros de física/astronomía e ingeniería eléctrica la definición de número complejo varía ([Staelin 2011](#)). La onda sinusoidal está definida como:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \text{Re} \left[A e^{-j(\omega t + \phi)} \right], \quad \text{y} \quad A_i \equiv -A \sin \phi \quad (64)$$

con lo que la rotación de ϕ se ve invertida. Para transformar de notación simplemente $j \rightarrow -j$.

Representación geométrica

- La representación de $\mathcal{A}$ puede expresarse en términos geométricos, donde la magnitud del fasor $\mathcal{A}$ es A y su fase es ϕ
- Representación particularmente importante para entender la carta de Smith (*Smith Chart*)

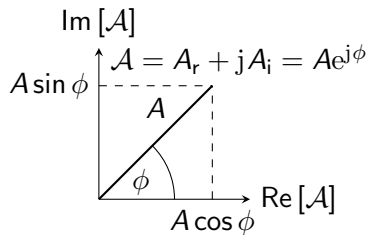


Figura: Representación de un fasor en el plano complejo.

- Propiedades:

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_i^2}$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{A_i}{A_r} \right) \quad (65)$$

- Nótese que: $e^{j\pi} + 1 = 0$

- Otras propiedades:

$$A_r = \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}}), \quad A_i = \frac{1}{2} (\mathcal{A} - \overline{\mathcal{A}}) \quad (66)$$

$$\overline{\mathcal{A}} = A_r - j A_i = A e^{-j \phi} \quad (67)$$

Resumen

- Notación $\mathbf{F}$ es vector y F es un escalar
- Matrices serán designadas con el estilo: $[\mathbf{R}]$
- El vector desplazamiento es $\hat{\mathbf{s}}$ y el posición es $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow$ estos son fundamentales en electromagnetismo
- Existen integrales de línea $d\mathbf{l}$, área $d\mathbf{a}$ y volumen $d\tau$, cada una con distintos diferenciales y que usan coordenadas específicas
- Vimos números complejos: que utilizaremos en su mayoría con j como numero imaginario
- Teoremas:
 - 1 Teorema fundamental del cálculo
 - 2 Divergencia (Gauss)
 - 3 Rotor (Stokes)
- Breve introducción a la notación fasorial para campos armónicos
- Próxima clase: 1.1 principios de teoría electromagnética
- Fórmulas serán dadas con anticipación en el **formulario oficial**

Bibliografía

Arfken, G. B., & Weber, H.-J. 1967, Mathematical methods for physicists (Academic Press Orlando, FL)

Griffiths, D. J. 2017, Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. (Prentice Hall)

Staelin, D. H. 2011, Electromagnetics and applications (Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA)