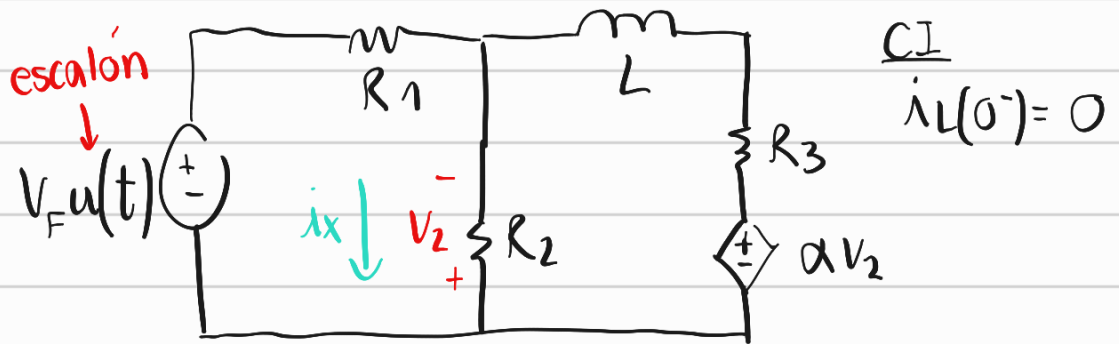
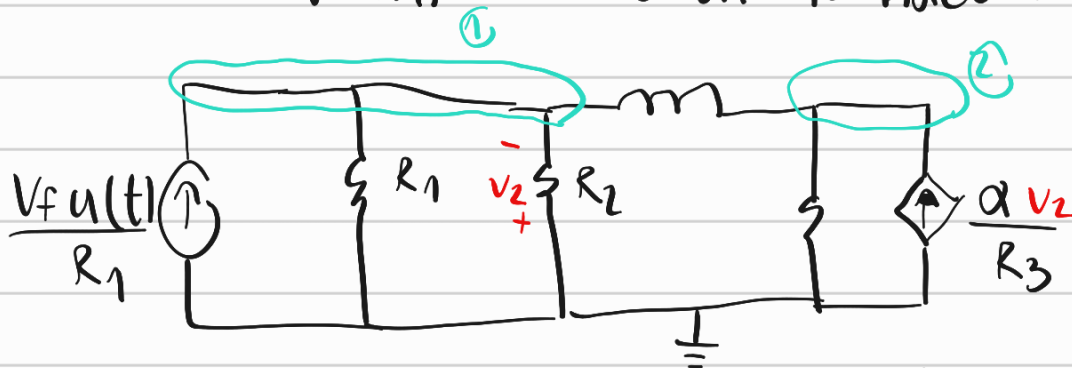


P₁



Se pide encontrar corriente por R_2 (en el sentido de la figura). La idea sería aplicar uno de los métodos conocidos y así encontrar i_{R_2} de manera fiable. Para escoger cuál aplicar hagamos un análisis rápido: si se hace mallas entonces se hace necesario encontrar (i_1) e (i_2) y luego $i_{R_2} = i_1(t) - i_2(t)$. No obstante si transformamos algunas fuentes análisis nodal lo hace más sencillo.



Acá basta encontrar V_1 y luego $i_{R_2} = \frac{V_1}{R_2}$.

Primero notamos que $V_2 = -V_1$

LCK ①
+ "out"

$$i_{R_1} + i_{R_2} + i_L = \frac{V_F u(t)}{R_1}$$

$$V_1 G_1 + V_1 G_2 + i_L = \frac{V_F u(t)}{R_1}$$

Para determinar i_L recordamos que:

$$\frac{d}{dt} \int L i_L = \phi, \text{ con } \phi \text{ flujo del campo magnético enlazado}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = V_L (*)$$

fem

Aplicando Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left[L \frac{di_L}{dt}\right] = \mathcal{L}[V_L]$$

$$L \left(s I_L(s) - i_L(0^-) \right) = V_L(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s}}$$

Dada la convención de signos $V_L(t) = V_1(t) - V_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = V_1(s) - V_2(s)$
Ahora sí aplicamos TL a la ec del LCK en ①

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L} \left(\begin{array}{l} G_1 v_1(t) + G_1 v_2(t) + i_L(t) = G_1 V_F u(t) \\ G_1 V_1(s) + G_2 V_1(s) + \frac{V_1(s) - V_2(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s} = \frac{G_1 V_F}{s} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(G_1 + G_2 + \frac{1}{sL} \right) V_1 + \left(-\frac{1}{sL} \right) V_2 = \frac{G_1 V_F}{s} - \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (1)$$

LCK en nodo ②
+ "out"

$$V_2 G_3 - i_L - \alpha \overset{-V_1}{V_2} G_3 = 0$$

$$\mathcal{L} \left(V_2 G_3 + \alpha G_3 V_1 - i_L = 0 \right)$$

$$G_3 V_2(s) + \alpha G_3 V_1(s) - \left(\frac{V_1(s) - V_2(s)}{sL} + \frac{i_L(0^-)}{s} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\alpha G_3 - \frac{1}{sL} \right) V_1(s) + \left(G_3 + \frac{1}{sL} \right) V_2(s) = \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (2)$$

Escribiendo (1) y (2) matricialmente:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ \alpha G_3 - \frac{1}{sL} & G_3 + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_1 V_F}{s} - \frac{i_L(0^-)}{s} \\ \frac{i_L(0^-)}{s} \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar V_1 por tanto resolviendo con regla de Cramer (asumimos en este pto que $i_L(0^-) = 0$):

$$V_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{G_1 V_F}{s} & -\frac{1}{sL} \\ 0 & G_3 + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{G_1 V_F}{s} \left(G_3 + \frac{1}{sL} \right)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_1 + G_2 + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ \alpha G_3 - \frac{1}{sL} & G_3 + \frac{1}{sL} \end{vmatrix}$$

$$= \left(G_1 + G_2 + \frac{1}{sL} \right) \left(G_3 + \frac{1}{sL} \right) + \frac{1}{sL} \left(\alpha G_3 - \frac{1}{sL} \right)$$

$$= G_3 (G_1 + G_2) + \frac{G_1 + G_2}{sL} + \frac{G_3}{sL} + \frac{1}{s^2 L^2} + \frac{\alpha G_3}{sL} - \frac{1}{s^2 L^2}$$

$$= \frac{sL G_3 (G_1 + G_2) + G_1 + G_2 + G_3 (1 + \alpha)}{sL}$$

$$\Rightarrow V_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{G_1 V_F}{s} \frac{sL G_3 + 1}{sL}}{\frac{sL G_3 (G_1 + G_2) + G_1 + G_2 + G_3 (1 + \alpha)}{sL}}$$

Como estamos en el dominio de Laplace y la solución se quiere en el dominio del tiempo se hace necesario antitransformar la expresión. Para ello se hace uso de la descomposición en fracciones parciales, recordando que se tienen los siguientes pares de transformadas:

Dominio "t"		Dominio "s"
e^{-at}	$\xleftrightarrow{L}$	$\frac{1}{s+a}$
$u(t)$	$\xleftrightarrow{L}$	$\frac{1}{s}$

Por tanto la idea es trabajar la expresión encontrada y llegar a estas formas conocidas:

$$V_1(s) = \frac{G_1 V_F}{s} \cdot (s L G_3 + 1) \cdot \frac{1}{L G_3 (G_1 + G_2) \left(s + \frac{G_1 + G_2 + G_3(1+d)}{L G_3 (G_1 + G_3)} \right)}$$

τ tiempo característico

$$= \frac{G_1 V_F \cancel{s L G_3}}{\cancel{s L G_3} (G_1 + G_2)} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau} + \frac{V_F G_1}{L (G_1 + G_2) G_3} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau}$$

* descomponemos en fracciones parciales

$$\frac{1}{s(s + 1/\tau)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/\tau}$$

$$= \frac{A(s + 1/\tau) + Bs}{s(s + 1/\tau)}$$

deben ser iguales

$$= \frac{(A+B)s + \frac{A}{\tau}}{s(s + 1/\tau)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A+B)}_{=0} s + \underbrace{\frac{A}{\tau}}_{=1} = 1$$

$$\Rightarrow A = -B \quad \Rightarrow A = \tau$$

Por tanto:

$$V_1(s) = \frac{G_1 V_F}{G_1 + G_2} \frac{1}{s + 1/\tau} + \frac{V_F G_1}{(G_1 + G_2) L G_3} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + 1/\tau}$$

$$= \frac{G_1 V_F}{G_1 + G_2} \frac{1}{s + 1/\tau} + \frac{V_F G_1}{L (G_1 + G_2) G_3} \cdot \frac{(G_1 + G_2) L}{G_1 + G_2 + (1+d) G_3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right)$$

Antitransformando:

$$V_1(t) = \frac{G_1 V_F}{G_1 + G_2} e^{-t/\tau} + \frac{V_F G_1}{G_1 + G_2 + (1+d) G_3} (u(t) - e^{-t/\tau})$$

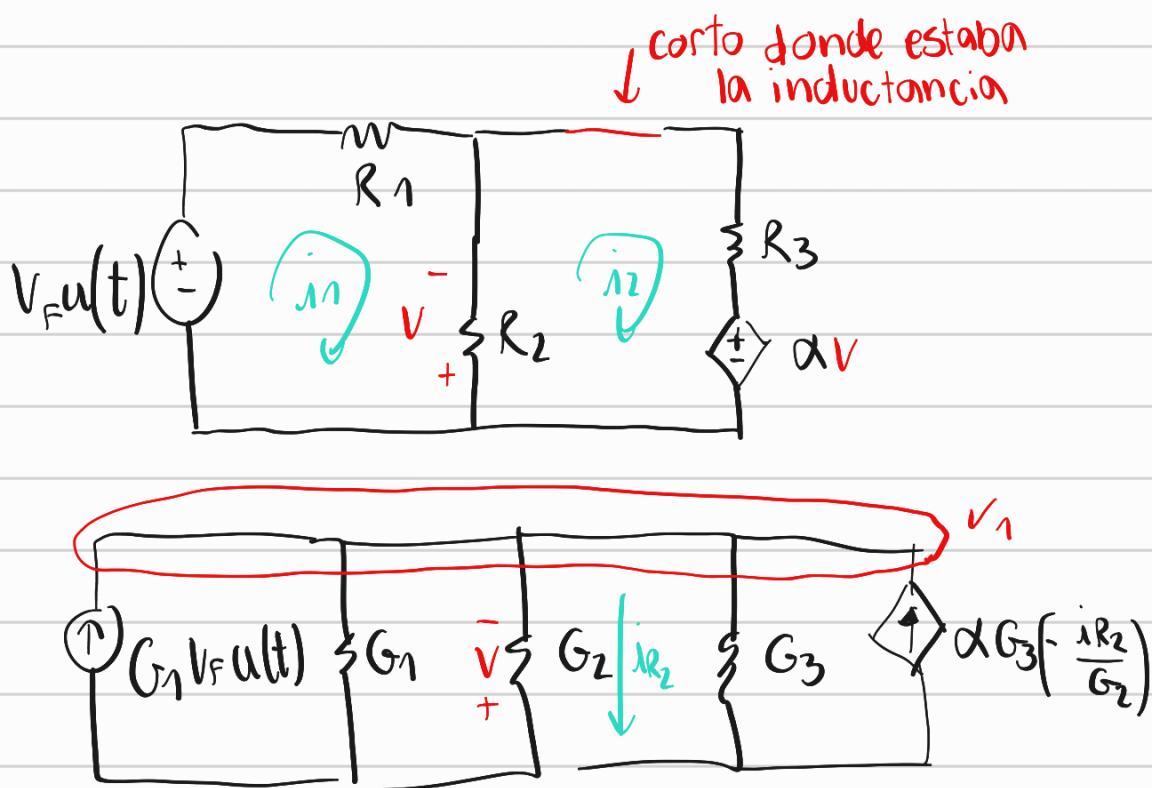
$$= \underbrace{V_F G_1 \left(\frac{1}{G_1 + G_2} - \frac{1}{G_1 + G_2 + (1+d) G_3} \right)}_{\text{transiente} = C_1} e^{-t/\tau} + \underbrace{\frac{V_F G_1}{G_1 + G_2 + (1+d) G_3}}_{\text{régimen permanente } C_2} u(t)$$

$$\Rightarrow i_{R_2}(t) = G_2 v_1(t) = G_2 C_1 e^{-t/\tau} + G_2 C_2 u(t)$$

Si se toma límite $t \rightarrow \infty$, el término transiente desaparece y solo queda el asociado al régimen permanente.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_{R_2}(t) = G_2 C_2 u(t), \text{ con } C_2 = \frac{V_F G_1}{G_1 + G_2 + (1+\alpha)G_3}$$

Comparemos este resultado con la misma corriente i_{R_2} pero en caso de que la inductancia se reemplaza por un corto:



Por div de corriente:

$$i_{R_2}(t) = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot \left(V_F G_1 u(t) + \alpha G_3 \overset{\text{por ley de Ohm}}{\underset{\substack{\parallel \\ - \frac{i_{R_2}(t)}{G_2}}}{V}} \right)$$

$$i_{R_2}(t) \left(1 + \frac{\alpha G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \right) = \frac{V_F G_2 G_1 u(t)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_{R_2}(t) = \frac{V_F G_2 G_1 u(t)}{\cancel{G_1 + G_2 + G_3}} \cdot \frac{\cancel{G_1 + G_2 + G_3}}{G_1 + G_2 + G_3 + \alpha G_3}$$

$$= \frac{V_F G_2 G_1 u(t)}{G_1 + G_2 + G_3(1 + \alpha)} = G_2 G_1$$

Lo que era de esperarse ya que en régimen permanente las inductancias se comportan como un cortocircuito.