Laboratorio 2: Simulación de Monte Carlo II

CI6314 - Modelamiento y Simulación de Sistemas

August 21, 2023

Overview

Integración usando Monte Carlo

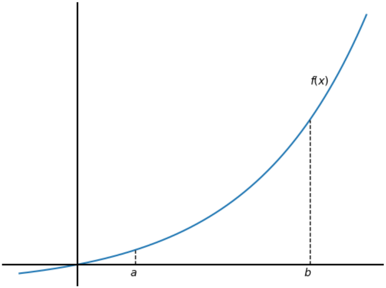
Una de las aplicaciones más comunes del método de Monte Carlo es encontrar valores numéricos a expresiones difíciles de calcular analíticamente.

En esta clase vamos a ver integrar funciones complejas usando una simulación de Monte Carlo. Esto es especialmente útil para las funciones que no tienen primitiva.

Background

El método es simple. Supongamos que queremos conocer el valor de:

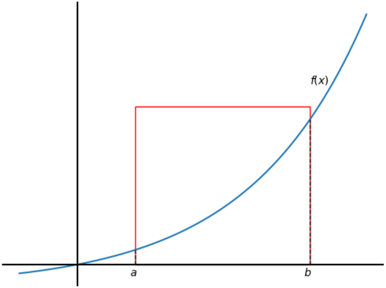
$$\int_a^b f(x)dx$$



Background

$$\int_a^b f(x)dx$$

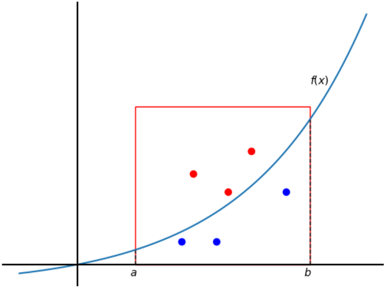
Primero definimos un rectángulo de superficie A conocida conteniendo el área de integración:



Background

Luego generamos puntos al azar dentro de nuestro rectángulo.

- Si el punto cae dentro del área de integración (bajo $f(x)$) se considera un éxito E
- Si el punto cae fuera del área es un fracaso F



Background

Luego de un muchas repeticiones podemos estimar:

$$p = \mathbb{P}(\text{estar de dentro del área}) = \frac{E}{E+F}$$

Luego obtenemos el área de integración haciendo multiplicando el área del rectángulo por la probabilidad anterior:

$$\int_a^b f(x)dx \approx pA$$

Ejercicios

Código

Calcular el valor de:

$$F_1(x) = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx$$

$$F_2(x) = \int_{0}^{10} 2 + \sin(x) - \frac{\cos(x^2)}{4}\,dx$$

Ejercicio 1

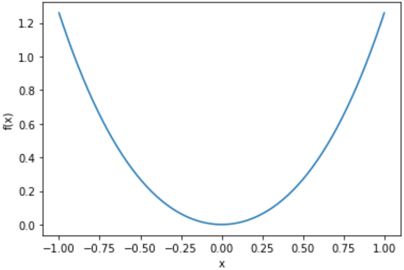
Veamos la integral:

$$F_1(x) = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt[3]{x^2+1}dx$$

Notemos que esta integral no tiene primitiva, por lo tanto no es fácil resolverla fácilmente de forma analítica.

Ejercicio 1

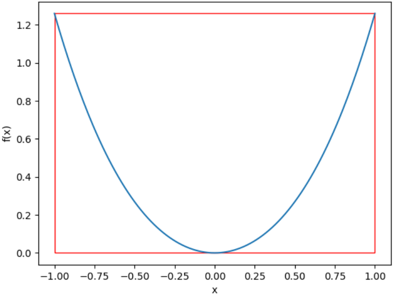
La función $x^2\sqrt[3]{x^2+1}dx$ entre $x=-1$ y 1 sigue el siguiente comportamiento



Es necesario definir los limites del rectángulo donde generaremos los puntos.

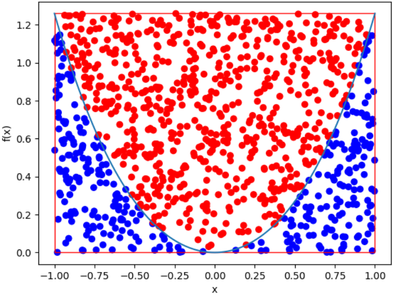
Ejercicio 1

1. Los límites de x son naturalmente los límites de integración: $x_l = -1, x_u = 1$
2. El límite inferior de $f(x)$ será $y_l = 0$, ya que nos interesa encontrar puntos bajo la curva.
3. El límite superior de $f(x)$ puede ser cualquier valor superior que contenga todos los puntos de la función, luego $y_u \geq \max f(x)$.



Ejercicio 1

Tras 1000 réplicas iniciales vemos el siguiente resultado:



Obtenemos los siguientes indicadores:

$$p \approx 0.302$$
$$s^2 = 0.459$$
$$c_{0.95}(p) = [0.237, 0.330]$$

Podemos ver que el intervalo de confianza es demasiado amplio para obtener una solución confiable.

Ejercicio 1

Utilizando un nivel de confianza del $C = 0.95$ y un error de $e = 0.001$, estimamos la cantidad de repeticiones necesarias en:

$$N = \left(\Phi^{-1}_{\left(\frac{1+C}{2}\right)} \frac{\hat{\sigma}}{e} \right)^2$$

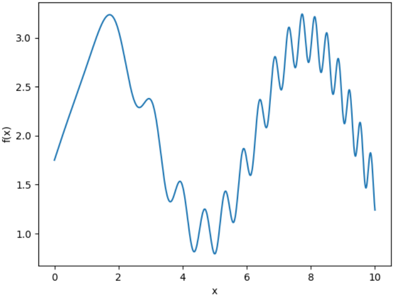
Tras aproximadamente 1,8 millones de réplicas, obtenemos el resultado:

$$F_1(x) = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt[3]{x^2 + 1} dx \approx 0.7774141$$

Ejercicio 2

Repita el procedimiento anterior para encontrar el valor de:

$$F_2(x) = \int_0^{10} 2 + \sin(x) - \frac{\cos(x^2)}{4} dx$$



Propuesto

Proponga, programe y resuelve un procedimiento similar para determinar el valor de π.

Hint: Estime el área de una circunferencia usando una simulación de Monte Carlo