MA3701-1 Optimización
Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 11: Más KKT

16 de junio de 2023

P1. El regreso de Karush-Kuhn-Tucker En Egipto se descubrió una pirámide cuyo interior es completamente hueco, y se quiere construir en su interior un recipiente cilíndrico para almacenar agua en caso de crisis hídrica. La idea es que quepa la mayor cantidad de agua posible dentro de este recipiente. Calcule, dado que la base de la pirámide es un cuadrado de lado $2a$ y altura H, el máximo volumen que puede tener este recipiente. Para ello:

a) Modele esta situación como un problema de optimización en su formato estandar (de minimización, con restricciones de tipo $g(x) \leq 0$). Para esto, considere por simplicidad que tanto la pirámide como el cilindro tienen paredes de grosor despreciable (es decir son superficies), y que el centro del cilindro debe estar alineado con el centro de la base de la pirámide. Concluya que este problema debe tener solución ocupando un teorema clásico de existencia. (**Hint:** use un resultado de geometría PSU para que el problema tenga sólo 3 restricciones.)

b) Muestre que el modelo obtenido cumple la *condición de independencia lineal* en todo punto factible.

c) Use el teorema de KKT para encontrar los parámetros óptimos y calcule el valor objetivo del problema.

P2. Aplicando todo. Para un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la función:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + \alpha x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2.$$

a) Demuestre que f_α es una función convexa si y solo si $\alpha \in [-4, 4]$.

b) Sea $\alpha \in [-4, 4]$. Considere el siguiente problema de optimización.

$$\begin{aligned} \min\ & f_\alpha(x_1, x_2) \\ \text{sa}\ & x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema usando el resultado de búsqueda de mínimos que estime conveniente.

P3. Un clasicazo. Considere el siguiente problema (que vimos en aux 1):

Deseamos diseñar un cilindro de radio r y altura h cuyo volumen sea máximo, manteniendo un área menor o igual a una cantidad S **fija**.

Este problema, como vimos, tiene por solución $(r, h) = (\sqrt{\frac{S}{6\pi}}, \frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{S}{6\pi}})$.

Plantee este problema como un problema de KKT y corrobore este resultado.

Resumen

Considere el problema (P) dado por:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{sa } g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \\ &\quad\ h_j(x) = 0, \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Donde diremos: $I := 1, \ldots, m$ y $J := 1, \ldots, p$

- **Condiciones de necesarias optimalidad de primer orden generales (KKT):** Sea x_0 un mínimo local para el problema (P) tal que cumple (IL), entonces existen multiplicadores $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$ (uno por cada resticcion de igualdad) y $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$ (uno por cada desigualdad) tales que:

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x_0, \lambda, \mu) & = 0 \\ \mu_i g_i(x_0) & = 0 \\ h_j(x_0) & = 0 \\ g_i(x_0) & \leq 0 \\ \mu_i & \geq 0 \end{cases}$$

  Con:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \cdot h_j(x)$$

  Donde se dice que punto x cumple la *condición de independencia lineal (IL)* si:

$$\{\nabla h_j(x)\}_{j \in J} \cup \{\nabla g_i(x)\}_{i \in I(x)}$$

  Es un conjunto linealmente independiente. (Y donde $I(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$.).

  En el caso donde no hay restricciones, esto se reduce al ya clásico caso de $\nabla f(x_0) = 0$.

- **Condiciones suficientes de optimalidad. Caso sin restricciones.** Sea $f \in \mathcal{C}^2(S)$ donde S es un abierto. Si $x_0 \in S$ cumple:

  i.- $\nabla f(x_0) = 0$

  ii.- El Hessiano $H(x_0)$ es definido positivo.

  Entonces, x_0 es un mínimo local estricto de f en S.

  Nota: Si el Hessiano es, por otro lado, def. negativo, el punto será un máximo local estricto. Si no es ninguno de las dos, será un punto silla. Si es cero, no nos da nada de información.