

MA3701-1 Optimización

Profesor: Vicente Acuña

Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

**Auxiliar 9: Convexidad en funciones**

9 de junio de 2023

P1. Chequeando cosillas. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y:

- a) $\frac{1}{f}$ cóncava
- b) $\log(f)$ es convexa
- c) f convexa

Muestre $a) \implies b) \implies c)$, y construya contraejemplos de las implicancias reversas.**P2. Las pitatorias me dan ansiedad.** Muestre que si $a_1, \dots, a_n$ son n reales estrictamente positivos, entonces:

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

P3. Que nivel Maribel. Encuentre la curva de nivel α para $f(x, y) = \log(x + y)$ para $x, y > 0$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$.**P4. Siempre atentxs.** Muestre que el siguiente conjunto es convexo:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid 17x_1 + 23x_2 + 29x_3 + 83x_4 + 71x_5 + \sum_{i=1}^5 |x_i|(1 + |x_i|) \leq 22 \right\}$$

Resumen

- **Función convexa:** Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si:

$$\forall x, y \in D \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- **Conjuntos relevantes:** Se definen los siguientes conjuntos:

- $N_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$, el conjunto de nivel α .
- $C_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \alpha\}$, curva de nivel α .
- $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$, el epígrafo de f .

- **Teorema:** Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene que:

- a) f es convexa $\iff \text{epi}(f)$ es convexo
- b) f convexa $\implies N_\alpha$ convexo $\forall \alpha \in \mathbb{R}$