Pauta P1 Examen MA3403-2

P1. a) Sean X, Y v.a. independientes tales que $X \sim e(\alpha)$ e $Y \sim e(\beta)$.

1. Plantee las integrales para calcular:

$$\mathbb{P}(a < \mathrm{Min}(X,Y) < b)$$

Debe graficar la región de integración.

PTS : 2,0

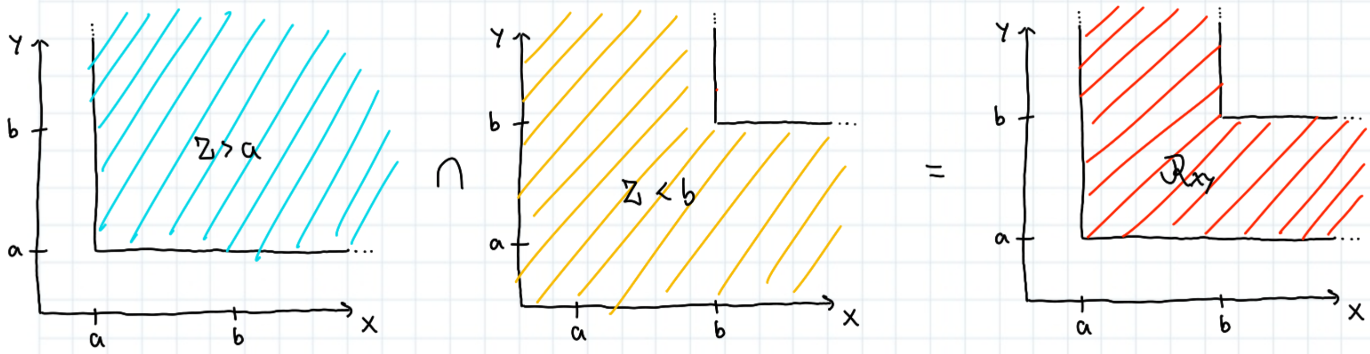
a) I) Tenemos $X \sim e(\alpha)$ y $Y \sim e(\beta)$ v.a.i.

Nos piden graficar la región de integración para las integrales para calcular $P(a < \min(X,Y) < b)$

Tenemos $Z = H(X,Y) = \min(X,Y)$ función del vector aleatorio (X,Y)

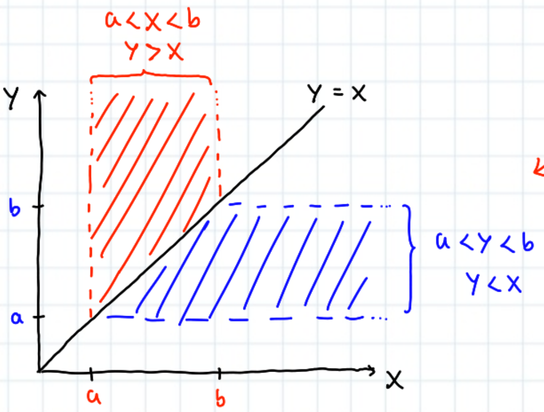
$\Rightarrow P(a < Z < b)$

La región de integración resultante es



O también verlo como $\min(X,Y) = \begin{cases} X & \text{si } X \leq Y \\ Y & \text{si } Y < X \end{cases}$

Entonces



Cualquiera de los dos procedimientos + 1,0

Luego, debemos plantear las integrales.

$$P(a < \min(X,Y) < b) = \iint_{R_{xy}} f_{xy} \; \begin{matrix} dx\,dy \\ \text{o} \\ dy\,dx \end{matrix} = \int_a^\infty \int_a^b f_{xy}\, dx\, dy + \int_a^b \int_b^\infty f_{xy}\, dx\, dy$$

no es la única forma de plantearlo

Luego, como X e Y son indep. $\Rightarrow f_{xy} = f_x \cdot f_y = \alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot \beta \cdot e^{-\beta y} = \alpha\beta\, e^{-(\alpha x + \beta y)}$ + 0,6

formulario distribución conocida

$$\Rightarrow \boxed{P(a < \min(X,Y) < b) = \int_a^\infty \int_a^b \alpha\beta\, e^{-(\alpha x + \beta y)}\, dx\, dy + \int_a^b \int_b^\infty \alpha\beta\, e^{-(\alpha x + \beta y)}\, dx\, dy}$$ +0,4

II. Si X : Tiempo (UT) entre emisión de dos particulas, y $\alpha = 0,2$ ($X \sim e(0,2)$). Calcule la probabilidad que en las próximas 10 (UT) se emita al menos una particula.

$\boxed{\text{PTS : 1,0}}$

a) II) Tenemos X : tiempo (UT) entre emisión de dos partículas con $X \sim exp(0,2)$

Debemos calcular probabilidad que en las próximas 10 (UT) se emita al menos una.

Notemos que si $X > 10 \Rightarrow$ se emitió una particula dsps de 10 (UT), lo que implica ninguna dentro de las 10 (UT).

Queremos al menos una partícula en los próximas 10 (UT)

$$\Rightarrow P(\text{al menos una en 10 (UT)}) = 1 - P(\text{ninguna partícula en 10 (UT)}) \Big\} +0,4$$

+0,2

$$y \quad P(\text{ninguna partícula en 10 (UT)}) = P(X > 10)$$

Nikita Nipone

$$= \int_{10}^{\infty} f_X \, dx \underset{\text{Distribución de } X \; \}\, +0,1}{=} \int_{10}^{\infty} 0,2\, e^{-0,2x} dx = -\int_{10}^{\infty} -0,2\, e^{-0,2} dx$$

$$= -\left[e^{-0,2x}\right]_{x=10}^{x=\infty} = \left[e^{-0,2x}\right]_{x=\infty}^{x=10}$$

Calculadora

$$= e^{-2} = 1/e^2 \approx 0,1353 \Big\} +0,2$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\text{al menos una en 10 (UT)}) = 1 - 0,1353 = 0,8647} \Big\} +0,1$$

b) Sea $X \sim P(\lambda)$ y $X_1, \ldots, X_n$ (n grande).

I. Construya un I.C. para el parámetro λ, con confianza $(1-\alpha)$.

PTS: 2,0

b) I) Tenemos $X \sim P(\lambda)$ y una muestra aleatoria (v.a.i.i.d.)

Debemos determinar I.C. para λ con confianza $\gamma = 1-\alpha$

Notemos que esta pregunta es I.C. para $E(X) = \lambda$

El estimador de $\hat{\lambda} = \bar{X}$. Por otro lado $E(X_i) = \lambda$ y $Var(X_i) = \lambda$ (formulario) $\}$ +0,3

Ahora se debe conocer cómo distribuye $\hat{\lambda} = \bar{X}$. Por TCL para n.g. tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sum X_i - E(\sum X_i)}{\sqrt{Var(\sum X_i)}} \underset{n.g}{\approx} N(0,1) \\ \Rightarrow\ &\frac{\sum X_i - n\,E(X_i)}{\sqrt{n\,Var(X_i)}} \underset{n.g}{\approx} N(0,1) \\ \Rightarrow\ &\frac{\bar{X} - E(X_i)}{\sqrt{Var(X_i)/n}} \underset{n.g}{\approx} N(0,1) \\ \Rightarrow\ &\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \underset{n.g}{\approx} N(0,1) \end{aligned}\right\} +0{,}8$$

Para int. con conf. $1-\alpha$:

$$\Rightarrow I.C_{1-\alpha}(\lambda) = \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\lambda/n}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \Big\} +0{,}3$$

$$= \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{n}} < \lambda < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

$$+0{,}5 \Big\{ = \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} < \lambda < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}\right)$$

/ pues para n.g $\hat{\theta} \approx \theta$ y se puede reemplazar en las cotas

$$= \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} < \lambda < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I.C_{1-\alpha}(\lambda) = \left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\ ;\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)} \Big\} +0{,}1$$

II. Evalúe si $n = 25$, $1-\alpha = 0{,}9$, $\bar{X} = 4$.

PTS: 1,0

b) II) Si $1-\alpha = 0{,}9 \Rightarrow \underbrace{\alpha = 0{,}1}_{+0{,}1} \Rightarrow \underbrace{1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95}_{+0{,}1} \xRightarrow{\text{ver tabla}} \underbrace{z_{0{,}95} = 1{,}65}_{+0{,}4}$

Reemplazando:

$$I.C_{90\%}(\lambda) = \left(4 - 1{,}65\sqrt{\frac{4}{25}}\ ;\ 4 + 1{,}65\sqrt{\frac{4}{25}}\right) \Big\} +0{,}2$$

$$\Rightarrow \boxed{I.C_{90\%}(\lambda) = (3{,}34\ ;\ 4{,}66)} \Big\} +0{,}2$$

//