

# Control 3 - P3 MA3403

a) [4pts]  $X, Y, Z$  v.a.i.i.d con distribución  $N(0, \sigma^2)$

I. [1pto]  $X_1, \dots, X_n$  m.a de  $X$

$\Rightarrow$  Usando las momentas:  $E(X^2) = \text{Var}(X) + E(X)^2 = \sigma^2$

$$\Rightarrow \widehat{E(X^2)} = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} \quad // \quad +0,5$$

$$\text{Luego } E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\sum X_i^2}{n}\right) = \frac{\sum E(X_i^2)}{n} = E(X_i^2) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2$$

$\therefore$  El estimador es Insesgado. +0,5

II [3 pts]  $L(\vec{r}, \sigma) = \prod_{i=1}^n f_i(r, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{2\pi} r_i^2 e^{-r_i^2/2\sigma^2}}{\sqrt{\pi} \sigma^3}$   
 $\hookrightarrow$  E.M.V. +0,5 +0,5  $\hookrightarrow r > 0$

$\Rightarrow$  Aplicamos  $\ln()$

$$\text{luego } l(\vec{r}, \sigma) = \ln(L(\vec{r}, \sigma)) = \frac{n}{2} \ln(2) + 2 \sum_{i=1}^n \ln(r_i) - \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(\pi) - \frac{3n}{2} \ln(\sigma) \quad +0,5$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} = \frac{1}{2(\hat{\sigma}^2)^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{3n}{2\hat{\sigma}^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Imponemos para max.} \quad \hookrightarrow +0,3$$

luego como sabemos que  $\hat{\sigma}^2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n r_i^2 - 3n = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum r_i^2}{3n} \quad // \quad +0,7 \text{ por resultado final}$$

+0,5 por explicación conceptual

b) [2 pts] ¿convergencia de  $f_n = \frac{n_c}{n}$ ?

I [1 pto]

Digamos  $n_i$ : Cuenta si el  $i$ -ésimo punto cae en el círculo

$$\Rightarrow n_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \in \odot \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Rightarrow P(n_i=1) = \frac{A_\odot}{A_\square} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Podemos definir  $n_i \sim \text{Bernoulli}(\pi/4) \Rightarrow n_c = \sum n_i$   
+0,5

$$\hookrightarrow \text{luego } f_n = \frac{n_c}{n} = \frac{\sum n_i}{n} = \bar{n}_i$$

Considerando la Ley de los Grandes Números

$$\bar{n}_i \rightarrow E(n_i)$$

$$\Rightarrow E(n_i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f_n \rightarrow \frac{\pi}{4} //$$
  
+0,5

II [1 pto]

Estimador de  $\pi$

$$\text{Como } E(n_i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{\pi} = 4 E(\hat{n}_i) = 4 \bar{n}_i = 4 f_n = \hat{\pi} //$$
  
+0,3 +0,4

+0,3 resultado anterior

+0,4 resultado final