Pauta P1 C3 MA3403-2

P1. En una población, las estaturas (en cms.) de hombres (H) y mujeres (M) son tales que:

$$H \sim N(170; 16) \quad M \sim N(\mu, \sigma^2)$$

a) Si el 50 % de las mujeres mide menos de 165 (cms.) y el 5 % mide menos de 160 (cms.), determine μ y σ^2.

P.T.: 1,0 pts

- 50% de mujeres mide menos de 165 cm $\Rightarrow P(M < 165) = 0{,}5$ (A) } +0,1
- 5% de mujeres mide menos de 160 cm $\Rightarrow P(M < 160) = 0{,}05$ (B) } +0,1

De (A): $P\left(\frac{M-\mu}{\sigma} < \frac{165-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}5$ ← estandarización

$P\left(Z < \frac{165-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}5$ +0,2

distribución $Z \sim N(0,1)$

Luego, al ver tabla de distribución normal $\Rightarrow \frac{165-\mu}{\sigma} = 0$ } +0,1

$\Rightarrow \boxed{\mu = 165}$ } +0,1

Ahora, de (B): $P\left(\frac{M-165}{\sigma} < \frac{160-165}{\sigma}\right) = 0{,}05$

$P(Z < -5/\sigma) = 0{,}05$ } +0,2

Luego, al ver nuevamente tabla de distribución normal $\Rightarrow -5/\sigma = -1{,}64$ } +0,1

$\Rightarrow \sigma = 5/1{,}64 \approx 3{,}04$

$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = 9{,}24}$ } +0,1

---

b) Suponga $\mu = 165$, $\sigma^2 = 9$. Se seleccionan dos hombres y tres mujeres (independientes). Calcule la probabilidad que la estatura promedio del grupo sea mayor a 170 (cms.).

P.T.: 2,0 pts

Con la suposición ahora tenemos $H \sim N(170; 16)$; $M \sim N(165; 9)$

Se toman dos hombres y tres mujeres (indep.) y debemos calcular que estatura prom. sea mayor a 170.

Llamando H_1, H_2, M_1, M_2, M_3, básicamente debemos calcular $P\Big(\underbrace{\frac{H_1 + H_2 + M_1 + M_2 + M_3}{5}}_{\Delta} > 170\Big)$ } +0,2

Como tenemos puras v.a.i. con distribuciones normales de parámetros conocidos, es posible calcular $E(\Delta)$; D.S. (Δ), luego, estandarizar Δ para ver el valor en la tabla de distribución normal.

Entonces, • $E(\Delta) = E\left(\frac{H_1 + H_2 + M_1 + M_2 + M_3}{5}\right) \overset{\text{linealidad de } E}{=} \frac{1}{5}\left[E(H_1) + E(H_2) + E(M_1) + E(M_2) + E(M_3)\right]$

$= \frac{1}{5}\left[170 + 170 + 165 + 165 + 165\right] = 167$ } +0,5

Sabemos que $D.S(\Delta) = \sqrt{Var(\Delta)}$. Calculemos $Var(\Delta)$

Var saca constantes al cuadrado

$\cdot\ Var(\Delta) = Var\left(\frac{H_1 + H_2 + M_1 + M_2 + M_3}{5}\right) = \frac{1}{25} Var(H_1 + H_2 + M_1 + M_2 + M_3)$

Son indep.

$= \frac{1}{25}\left[Var(H_1) + Var(H_2) + Var(M_1) + Var(M_2) + Var(M_3)\right] = \frac{1}{25}\left[16 + 16 + 9 + 9 + 9\right] = \frac{59}{25} = 2{,}36$ +0,5

$\Rightarrow D.S.(\Delta) = 1{,}53$ +0,1

Luego, estandarizamos:

$P\left(\frac{\Delta - E(\Delta)}{D.S.(\Delta)} > \frac{170 - E(\Delta)}{D.S.(\Delta)}\right) = P\left(Z > \frac{170 - 167}{1{,}53}\right) = P(Z > 1{,}96)$ +0,4

Ocupamos complemento por conveniencia para usar tabla de distribuc normal:

$P(Z > 1{,}96) = 1 - P(Z < 1{,}96) = 1 - 0{,}9750 = 0{,}025$

$\boxed{\therefore P(\Delta > 170) = 2{,}5\%}$ +0,3

---

c) Suponga $\sigma^2 = 9$ y μ desconocido. Se toma una muestra $M_1, ..., M_n$, determine n tal que:

$$\mathbb{P}(|\bar{M} - \mu| < 1) = 0{,}99$$

P.T.: 1,0 pts

Podemos saber por materia que $E(\bar{M}) = \mu$ y $Var(\bar{M}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$\Downarrow$

$D.S.(\bar{M}) = \sigma/\sqrt{n}$ +0,3

o si no se calculaba rápidamente:

Cálculos

$E(\bar{M}) \underset{\text{linealidad } E}{=} \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right) \underset{\text{linealidad } E}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(M_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \mu$

$Var(\bar{M}) \underset{\text{Var saca constantes al cuadrado}}{=} \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right) \underset{\text{indep. } M_1,...,M_n}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(M_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \sigma^2/n \Rightarrow D.S.(\bar{M}) = \sigma/\sqrt{n}$

Luego, con lo anterior podemos darnos cuenta que $P(|\bar{M} - \mu| < 1)$ está parcialmente estandarizada, pues ya se le estaba restando $E(\bar{M})$. Luego, dividimos por $D.S.(\bar{M}) = \sigma/\sqrt{n}$:

+0,4

$\Rightarrow P\left(\frac{|\bar{M} - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$

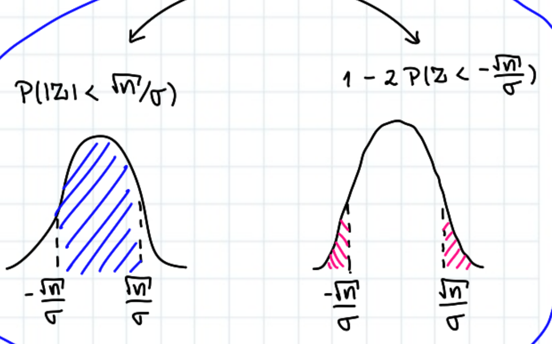
$\Rightarrow P\left(\left|\frac{\bar{M} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$ / prop. $|\cdot|$

$\Rightarrow P\left(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}99$ / $Z \sim N(0,1)$

$\Rightarrow 1 - 2P\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}99$ / explicación

$\Rightarrow P\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0{,}005$

VISTO EN AUXILIAR EN TODO CASO



básicam., calcular el área azul es lo mismo que calcular la totalidad de la campana (1) y restarle 2 veces cualquiera de los cachitos (cualquiera pq simétrico)

Luego, usando tabla de distribución normal:

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{n}}{\sigma} = -2{,}57 \quad \} \ +0{,}2$$

$$\Rightarrow n = (2{,}57 \cdot \sigma)^2$$

$$\Rightarrow n = (2{,}57 \cdot 3)^2$$

$$\Rightarrow n = 59{,}44$$

$\Rightarrow \boxed{n = 60}$ ← lo dejamos como entero para que tenga sentido (y es preferible aproximar por exceso) } +0,1

---

d) Suponga $\sigma^2 = 9$ y μ desconocido. Se toma una muestra de $n = 20$ mujeres obteniendo $\bar{M} = 165{,}5$.

I. Determine un IC del 95 % para μ.

P.T.: 1,0 pts

De formulario tenemos que para $\theta = \mu$; $X \sim N(\mu; \sigma^2)$; σ^2 conocido es

$$P\Big(\underbrace{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{L_i(\vec{X})} < \mu < \underbrace{\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{L_s(\vec{X})}\Big) = 1 - \alpha = \gamma$$

Tenemos
- $\sigma^2 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$
- $n = 20$
- $\bar{M} = 165{,}5$
- $\underbrace{\gamma = 0{,}95}_{+0{,}2} \Rightarrow \underbrace{\alpha = 0{,}05}_{+0{,}2} \Rightarrow \underbrace{1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975}_{+0{,}2}$

Lo menos indirecto es la determinación de $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0{,}975}$, pero es solo ver tabla de distribución normal:

$$\Rightarrow Z_{1-\alpha/2} = Z_{0{,}975} = 1{,}96 \quad \} \ +0{,}2$$

Ahora basta reemplazar:

$$I.C._{95\%}(\mu) = \left[165{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{20}} \ ; \ 165{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{20}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I.C._{95\%}(\mu) = [164{,}18 \ ; \ 166{,}81]} \quad \} \ +0{,}2$$

---

d) Suponga $\sigma^2 = 9$ y μ desconocido. Se toma una muestra de $n = 20$ mujeres obteniendo $\bar{M} = 165{,}5$.

II. ¿Con qué confianza se construyó el intervalo para μ dado por (164;167)?.

P.T.: 1,0 pts

Si no fuese simétrico, no se podría haber hecho

Podemos notar que el intervalo $(164 ; 167)$ es simétrico c/r a $\bar{M}$, y como sabemos que al final este intervalo de confianza es de la forma $(\bar{M} - \varepsilon ; \bar{M} + \varepsilon)$ podemos trabajar con el error (ε). } +0,2

Directo es que $\varepsilon = 1{,}5$, pues $[165{,}5 - 1{,}5 ; 165{,}5 + 1{,}5] = [164 ; 167]$

$$\Rightarrow 1{,}5 = \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{20}} \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}23 \quad \} \ +0{,}2$$

$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9871$ / al ver tabla de distribución normal } +0,2

$\Rightarrow \alpha = 0{,}0258$ } +0,2

Pero la confianza es $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}9742$

$\boxed{\therefore \text{ El intervalo se construyó con una confianza de } 97{,}42\,\%}$ } +0,2