Pauta P1 Control 1

MA3403 - 2 2023 - 1

P1. *a)* En una población de N personas se debe escoger un consejo de tamaño k, incluido el presidente ($k \leq n$).

1) Pruebe conceptualmente que (Con argumentos combinatoriales)

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

P1 a) 1) $\leftarrow$ 2,0 pts

0,7 ▷ $n\binom{n-1}{k-1}$: se elige el presidente (hay n opciones) y luego las $k-1$ personas que falten para el consejo, pero no entre n, sino que entre $n-1$, pues ya se eligió al presidente.

0,7 ▷ $k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\cdot k$: se eligen los k miembros del consejo y luego al presidente entre los k miembros.

solo para visualizar de mejor manera

0,6 ▷ $(n-k+1)\binom{n}{k-1} = (n-(k-1))\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k-1}(n-(k-1))$: se eligen $k-1$ miembros entre los n (todos los miembros excepto el presidente) y luego al presidente entre los $n-(k-1)$ que no quedaron como miembros del consejo.

solo para visualizar de mejor manera

//

P1. a) En una población de N personas se debe escoger un consejo de tamaño k, incluido el presidente ($k \le n$).

1) Pruebe conceptualmente que (Con argumentos combinatoriales)

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

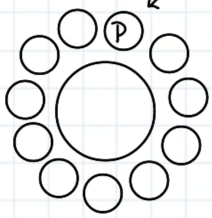
2) El elegido consejo de $k = 11$ personas (una presidenta, 3 consejeras, y 7 consejeros), se sientan al rededor de una mesa con la presidenta en *su silla*. Determine de cuántas formas se puede sentar el resto de tal forma que no queden mujeres juntas. Si se sientan al azar, ¿cuál es la probabilidad que no queden mujeres juntas?.

P1 a) 2) ← 2,0 pts

FORMA 1:

Se tiene:

presidenta fija



pero se puede pensar ⟹ como lo sgte.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
										P

donde por simplicidad visual se coloca a la presidenta en un extremo, pero recordemos que a la derecha de P sigue el otro extremo.

0,2 Lo primero es notar que inmediatam% a la izq. de P e inmediatam% a la derecha de P, deben ir sí o sí consejeros (hombres), ya que si no podría quedar la presidenta sentada junto a una o dos consejeras (es decir, mujeres juntas).

Por lo tanto la situación quedaría:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
H (·7)									H (·6)	P

⇒ $7 \cdot 6$

Ahora toca ver la cantidad de formas que se pueden ordenar entre los puestos b − i las 3 mujeres y 5 hombres que quedan, cumpliendo con que no queden mujeres juntas.

Una manera es la sgte.: En vez de calcular la cantidad de formas en las que no queden mujeres juntas, se calcula la cantidad total de formas sin restricción alguna y se le resta la cantidad de formas en que dos o más mujeres quedan juntas. Todo esto, recordemos, para b − i. Entonces,

$$\boxed{\#\text{ no mujeres juntas} = \#\text{ total de maneras} - \#\text{ 2 mujeres juntas} - \#\text{3 mujeres juntas}}$$

0,2 · #total de maneras $= 8! = 40320$ ⟶

b	c	d	e	f	g	h	i

- permutación de 8 casillas (b − i): $8!$

0,2 · # 3 mujeres juntas $= 3! \cdot 6! = 4320$

b	c	d	e	f	g	h	i
A	A	A					

- se toman las tres mujeres juntas como una sola casilla y se considera la permutación de 6 casillas (A, e, f, g, h, i): $6!$
- pero luego también la permutación misma de la casilla A: $3!$
- por ppio. de multiplicacø: $3! \cdot 6!$

· #2 mujeres juntas = ?

↳ Aquí nos colocamos en dos casos:

▷ 2 mujeres en bordes:

b	c	d	e	f	g	h	i
H	H	H	H	M	H	M	M

⇒ $(3 \cdot 2) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5! = 2 \cdot 3! \cdot 5 \cdot 5! = 7200$

5 opciones de H que debe ir sí o sí ahí para que no se repita el caso de 3 mujeres juntas

puede estar en cualquiera de ambos bordes

permutacø de 2 puestos entre 3 mujeres

0,3

las dos mujeres juntas pueden ocupar 5 posiciones distintas cumpliendo la condición de no estar en los bordes

▷ 2 mujeres no en los bordes:

M	H	H	H	H	M	M	H
a	b	c	d	e	f	g	h

$\Rightarrow (3\cdot 2)\cdot 5\cdot 5\cdot 4\cdot 4! = 5!\cdot 5! = 14\,400$

permutaç de 2 puestos entre 3 mujeres

nos aseguramos de que no pueda estar la 3ra mujer junto a las otras dos para que no se repita el caso de 3 mujeres juntas

Luego, #2 mujeres juntas = 2 mujeres en bordes + 2 mujeres no en bordes

i.e, # 2 mujeres juntas = 21 600

0,1

Como #no mujeres juntas = #total de maneras − # 2 mujeres juntas − #3 mujeres juntas

$\Rightarrow$ #no mujeres juntas $= 40320 - 21600 - 4320 = 14400$

Por último, nos queda lo sgte.:

$\cdot 7$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\cdot 6$

H									H	P
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k

$\underbrace{b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i}_{C}$

· #no mujeres juntas

0,5

Y, por el principio de multiplicaç, podemos concluir que la cantidad de formas que se puede sentar el resto de tal forma que no queden mujeres juntas está dada por $7\cdot 6\cdot 14400$, que resulta 604 800 formas distintas. //

0,3

Si se sientan al azar, la probabilidad de que no queden mujeres juntas está dada por $\frac{\#\text{favorables}}{\#\text{totales}}$, donde #favorables es 604800 (calculado recién) y #totales es 10!, pues basicamente es la permutación típica de 10 personas.

0,2 $\therefore$ P(no queden mujeres juntas si se sientan al azar) $= \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$

1,5

FORMA 2: Con la presidenta fija, se colocan primero los 7 hombres, y por ser distinguibles: 7!

presidenta fija → P _ _ _ _ _ _ _ ← maneras de colocar a los hombres: 7!

Luego, los * son los lugares que pueden tomar las mujeres:

P _ * _ * _ * _ * _ * _ * _ ← se deben elegir 3 puestos de los 6 (C_3^6) y después el orden de las mujeres (3!)

Por lo tanto, por ppio. de multiplicaç:

$\Rightarrow \binom{6}{3}\cdot 3!$

formas distintas de que no queden mujeres sentadas juntas es $7!\cdot\binom{6}{3}\cdot 3! = 604\,800$ //

0,5 Finalmente, la probabilidad de que no queden mujeres juntas es $\frac{\# fav}{\# tot}$ donde $\# tot = 10!$, pues se sienten al azar (y la presidenta es fija).

$$\boxed{\therefore P(\text{no queden mujeres juntas si se sienten al azar}) = \frac{604800}{10!} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}}$$

OBS: Puede que existan más formas de contar # fav, sin embargo, FORMA 1 (que es más larga) con FORMA 2 (que se saca en simples pasos) son prácticamente excluyentes.

P1. *a)* En una población de N personas se debe escoger un consejo de tamaño k, incluído el presidente ($k \leq n$).

1) Pruebe conceptualmente que (Con argumentos combinatoriales)

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

2) El elegido consejo de $k = 11$ personas (una presidenta, 3 consejeras, y 7 consejeros), se sientan al rededor de una mesa con la presidenta en *su silla*. Determine de cuántas formas se puede sentar el resto de tal forma que no queden mujeres juntas. Si se sientan al azar, ¿cuál es la probabilidad que no queden mujeres juntas?.

b) Dos urnas contienen dos monedas cada una. Las de la urna 1 son tales que $\mathbb{P}(cara) = P_1$ y las de la urna 2 tales que $\mathbb{P}(cara) = P_2$ $\quad (P_1 \neq P_2)$.
Se propone:

- Elegir una urna y lanzar las dos monedas.
- Elegir una moneda de cada urna y lanzarlas.

Se gana si se obtienen dos caras.
¿Qué procedimiento es más conveniente?.

P1 b) ← 2,0 pts

0,1 Tenemos dos casos y se gana si se obtienen dos caras. Consideramos la elección de las urnas equiprobables, es decir, P(urna 1) = P(urna 2) = 1/2

• 1er procedimiento: elegir una urna y lanzar las dos monedas

0,3 $P(\text{ganar con proce. 1}) = P(\text{urna 1}) \cdot \underbrace{P(\text{cara urna 1})}_{\text{moneda 1 urna 1}} \cdot \underbrace{P(\text{cara urna 1})}_{\text{moneda 2 urna 1}} + P(\text{urna 2}) \cdot \underbrace{P(\text{cara urna 2})}_{\text{moneda 1 urna 2}} \cdot \underbrace{P(\text{cara urna 2})}_{\text{moneda 2 urna 2}}$

a esta parte se puede llegar con "pasos extra", no tan directo como se ve aquí

0,2 $\Rightarrow P(\text{ganar con proce. 1}) = \dfrac{P_1^2}{2} + \dfrac{P_2^2}{2}$

• 2do procedimiento: elegir una moneda de cada urna y lanzarlas

0,3 $P(\text{ganar con proce. 2}) = P(\text{cara moneda urna 1}) \cdot P(\text{cara moneda urna 2})$

0,2 $\Rightarrow P(\text{ganar con proce. 2}) = P_1 \cdot P_2$

0,3 Ahora comparemos, para ver cuál procedimiento tiene mayor proba. de ganar:

$$P(\text{ganar con proce. 1}) \lesseqgtr P(\text{ganar con proce. 2})$$

$$\frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} \lesseqgtr P_1 \cdot P_2$$

$$P_1^2 + P_2^2 \lesseqgtr 2 \cdot P_1 \cdot P_2$$

$$P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_2 \lesseqgtr 0$$

$$P_1^2 - 2P_1 \cdot P_2 + P_2^2 \lesseqgtr 0$$

$$(P_1 - P_2)^2 \gtrless 0$$

y como $P_1 \neq P_2 \Rightarrow (P_1 - P_2)^2 > 0$

0,3 $\Rightarrow P(\text{ganar con proce. 1}) > P(\text{ganar con proce. 2})$

0,3 $\therefore$ El procedimiento más conveniente es el primero, pues tiene mayor probabilidad //