

Departamento de Ingeniería Matemática
 MA2601-6 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Ariel Pérez C.
Auxiliares: Anaís Muñoz P., Antonia Valenzuela C.



Auxiliar 5: EDOs de orden superior

19 de abril de 2023

P1. (Wronskiano y fórmula de Abel)

- (a) Sean $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere y_1, y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Demuestre que $W(y_1, y_2)$ es constante si y sólo si $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Explique por qué la equivalencia no es cierta si y_1, y_2 son linealmente dependientes.

P2. (Liouville y variación de parámetros)

Considere el problema de valor inicial

$$(*) = \begin{cases} y''(x) + 2 \tanh(x)y'(x) = \sinh(x) \text{ en } \mathbb{R} \\ y(0) = \pi \\ y'(0) = \pi. \end{cases}$$

Compruebe que $y_1 = \operatorname{sech}(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada. Encuentre explícitamente la única solución del problema (*) usando los métodos vistos en clase.

P3. (Coeficientes indeterminados) Encuentre la solución general de la EDO

$$y''' - 2y'' - 8y' = e^{3x} \operatorname{sen}(x) + 1 + 5e^{-2x}.$$

- P4. Consideremos el movimiento de un objeto de masa m , sujeto a un resorte ideal de masa despreciable. Diremos que este sistema objeto-resorte se encontrará en reposo, cuando todas las fuerzas actuando sobre él sumen 0, y se le llamará a esta posición de equilibrio. La variable y representa el desplazamiento vertical del objeto, medida desde su posición de equilibrio.

Se consideran las siguientes fuerzas actuando sobre el objeto:

1. Fuerza de gravedad $P = -mg$.
2. Fuerza F_s que corresponderá a la resistencia del resorte al cambio de su longitud, donde si el largo del resorte a variado en ΔL con respecto a su largo natural, entonces la fuerza será $F_s = K\Delta L$, donde $K > 0$ es la constante de elasticidad del resorte, y se tendrá que:
 - Si $\Delta L > 0$ entonces, $F_s > 0$ (por lo que la fuerza apunta hacia arriba).
 - Si $\Delta L < 0$ entonces, $F_s < 0$ (por lo que la fuerza apunta hacia abajo).
3. Una fuerza de amortiguación $F_d = -cy'$ con $c > 0$ que resiste al movimiento, notar que esta fuerza depende directamente de la velocidad
4. Una fuerza externa F , distinta de las tres fuerzas previas mencionadas, la cual tiene una dependencia temporal $F(t)$, pero es independiente del movimiento y de la velocidad (no depende ni de y , ni de y').

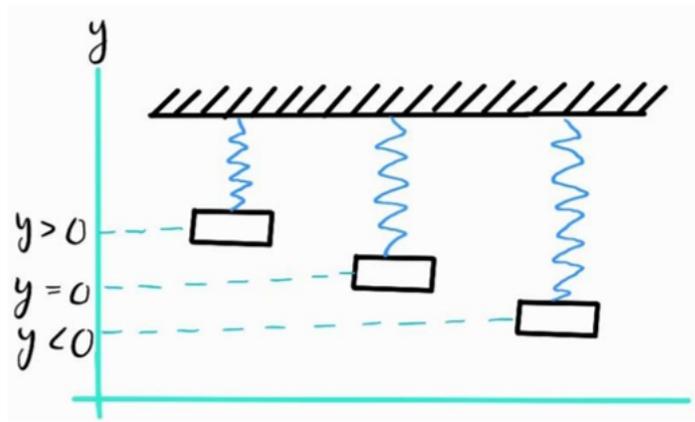


Figura 1: Desplazamiento vertical del objeto (que no se note que no sé dibujar).

Se dirá que el movimiento es libre si $F = 0$ y forzado si $F \neq 0$.

- Encuentre una expresión para modelar el sistema si se sabe que, sin la acción de fuerzas externas, el sistema estaría en equilibrio, deje esta expresión en función de y .
- Para la situación anterior, encuentre la ecuación de movimiento si el sistema es no amortiguado y libre, además, deje las constantes expresadas como senos y cosenos, y explique brevemente qué representan estas constantes.

Hint: Utilice $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, donde C_1 y C_2 son las constantes de la ecuación.

- Considere, para el caso (a), que además el resorte no es amortiguado y se encuentra sometido a la fuerza externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, con F_0 constante. Encuentre la ecuación de movimiento.