

P1/ $f = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{e^{-\frac{2\pi}{\omega}s}}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left(H\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t\right)$$

$$x = H\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \underbrace{\text{sen}(\omega t - 2\pi)}_{\text{sen } \omega t} + \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t \quad 0.5 \text{ pt}$$

$$x(t) = H\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t + \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t \quad 0.2 \text{ pt}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \text{sen } \omega t & t > \frac{2\pi}{\omega} \\ \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t & t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (0.3 \text{ pt})$$

P1

$$x'' + \omega^2 x = f$$

$$x(0) = x'(0) = 1$$

$$\omega > 0$$

$$s^2 \mathcal{L}(x) - 1 + \omega^2 \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(f) \cdot \frac{1}{\omega^2 + s^2} + \frac{1}{(s^2 + \omega^2)}$$

Si $f = \delta_{\frac{\pi}{\omega}}$

$$\mathcal{L}(x(t)) = e^{-\frac{\pi}{s}} \frac{1}{\omega^2 + s^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{e^{-\frac{\pi}{s}}}{s^2 + \omega^2} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + \omega^2}}_{\mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)}$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}\left(H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right) + \mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$x(t) = H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t - \pi\right) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

0.5 pt

$$x(t) = H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \left(-\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

0.2 pt

0.3 pt

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} \sin \omega t & \text{si } t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{si } t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

(puede ser $< \geq$ da lo mismo)

(b) $f = C_1 \delta a_1 + C_2 \delta a_2$

Queremos que quede en reposo para

$$t \in \left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega} \right)$$

y que $x(t) = 2 \operatorname{sen} \omega t$

$$t > 4\pi\omega$$

Observemos que en $\frac{\pi}{\omega}$ la velocidad de la sol

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

es $x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$

$$x'(t) = \frac{\omega}{\omega} \cos \omega t = \cos \omega t$$

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$$

$$x'\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \cos \omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -1$$

por lo tanto necesitamos que la velocidad a partir de $\frac{\pi}{2}$ sea 0 y la masa quede en reposo.

Esto también se obtiene de la parte a)

An

*

$$a_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$C_1 = 1$$

1pt

Para que salga del reposo en $\frac{4\pi}{\omega}$ y la solución.

$$\text{sea } 2 \operatorname{sen} \omega t$$

Necesitamos agregar una δ en $\frac{4\pi}{\omega}$, a una solución que parte del reposo

Para esto resolvemos

$$x'' + \omega^2 x = C_2 \delta_{\frac{4\pi}{\omega}}$$

$$x(0) = x'(0) = 0$$

(ya que parte del reposo $\frac{4\pi}{\omega}$ se puede asumir que siempre estubo en reposo)

Sea $x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t H$

$$\mathcal{L}(x) = C_2 e^{-\frac{4\pi}{\omega} s} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$\mathcal{L}(x) = C_2 e^{-\frac{4\pi}{\omega} s} \mathcal{L}\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$x = C_2 H\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right) \underbrace{\frac{1}{\omega} \sin \omega\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right)}_{\sin \omega t}$$

Queremos $x(t) = 2 \sin \omega t$

$$\frac{1}{\omega} C_2 = 2 \quad C_2 = 2\omega$$

(1pt)

$x(t)$ cumple con las condiciones

$$f = \delta_{\frac{\pi}{\omega}} + 2\omega \delta_{\frac{4\pi}{\omega}}$$

7.10.12

Otra forma: Dado que los cambios se necesitan en $\frac{\pi}{\omega}$ y $\frac{4\pi}{\omega}$

$$a_1 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$a_2 = \frac{4\pi}{\omega}$$

~~$$X(s) = \frac{C_1 e^{-\frac{\pi}{\omega}s}}{s^2 + \omega^2} + \frac{C_2 e^{-\frac{4\pi}{\omega}s}}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}(x)$$~~

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C_1 H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)\right) \\
 &+ C_2 H\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right)\right) \\
 &+ \frac{1}{\omega} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C_1 H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \left(-\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) \\
 &+ C_2 H\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

Si $t > \frac{4\pi}{\omega}$ la función $x(t) = -\frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot C_1 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t + C_2 \sin \omega t$

$$\frac{4\pi}{\omega} > t > \frac{\pi}{\omega} \quad x(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t + C_1 \left(-\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) \Rightarrow C_1 = 1 \quad (1 \text{ pt})$$

NOTAS:

$$-\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{C_2}{\omega} \operatorname{sen} \omega t = 2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$t > \frac{4\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{C_2}{\omega} = 2 \quad C_2 = 2\omega$$

(1 pt)

(c) $f = C_1 \delta_{a_1} + C_2 \delta_{a_2}$ quede en reposo
para
 $\left(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right)$

No tenemos que la solución $x'' + \omega^2 x = f$
 $x(0) = 0$
 $x'(0) = 1$

~~Llega con velocidad~~ Cumple

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega} \cdot \omega\right) = \frac{1}{\omega}$$

$$x'\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2\omega} \cdot \omega\right) = 0$$

~~Como no está en reposo~~

$$x\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \neq 0$$

Al agregar $C_1 \delta_{\frac{\pi}{2\omega}}$ podemos modificar
su velocidad

Pero no su posición.

Si consideramos $a_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ $a_2 = \frac{\pi}{\omega}$

Procediendo como antes

$$x(t) = C_1 H\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right) \frac{\sin \omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)}{\omega} + C_2 H\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \frac{\sin \omega\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)}{\omega} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

→ tone.

6

WEEK

FECHA / /

Para $t \in (\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega})$

$$x(t) = C_1 \cdot \frac{1}{\omega} \underbrace{\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}_{(-\cos \omega t)} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

$$x(t) = -\frac{C_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

Esta función no puede ser 0 ~~nunca~~
no se puede encontrar C_1 tq

$$-\frac{C_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t = 0$$

$$t \in (\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega})$$

ya que $C_1 = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}$ no es
cte en $(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega})$

(2 pt)

Esta parte es poco probable:

Cualquier otro valor para a_1 tampoco resulta ya que se necesita que

~~se anule~~

$$\sin \omega a_1 = 0$$

o sea $a_1 = k\pi$ pero entonces la solución no puede ser 0 en $(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega})$.

Pauta P2 C3

a)

i) Recordar que $\frac{d}{ds} \mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(-th)(s)$

Usando esto, $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(tg(t)) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(g)$ (0,2 pts)

$$\int_s^a \mathcal{L}(f(t))(\sigma) d\sigma = \int_s^a -\frac{d}{ds} \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g)(s) - \mathcal{L}(g)(a)$$

$$\Rightarrow \int_s^a \mathcal{L}(f(t))(\sigma) d\sigma = \mathcal{L}(g)(s) - \mathcal{L}(g)(a) \quad (0,8 \text{ pts})$$

ii) Como $\mathcal{L}(g)(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$, pues g es de orden exponencial

$$\Rightarrow -\mathcal{L}(g)(a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \quad (0,2 \text{ pts})$$

$$\int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(\sigma) d\sigma = \mathcal{L}(g(t))(s) = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) \quad (0,8 \text{ pts})$$

iii) $\mathcal{L}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)$ Notar que $\frac{e^t-1}{t}$ se extiende de manera continua a 0 por L'Hôpital (o def. de derivada)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = \frac{1}{1} = 1$$

ii)

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = \int_s^\infty \mathcal{L}(e^t-1)(\sigma) d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma} d\sigma \quad (1 \text{ pto})$$
$$= \ln\left|\frac{\sigma-1}{\sigma}\right| \Big|_s^\infty = -\ln\left(\frac{s-1}{s}\right) + 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)(s) = \ln\left(\frac{s}{s-1}\right) \quad (1 \text{ pto})$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+2}{s-5}\right)\right)$, then $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s+2}{s-5}\right)\right)$

$$F(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s-5}\right) \longrightarrow \mathcal{L}(f) = F(s)$$

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \left(\ln(s+2) - \ln(s-5) \right) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-5} = \mathcal{L}(e^{-2t} - e^{5t}) \quad (1 \text{ pto})$$

$$\frac{d}{ds} F(s) = -\mathcal{L}(t f(t)) = \mathcal{L}\left(-t \frac{e^{-2t} - e^{5t}}{-t}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{e^{-2t} - e^{5t}}{-t} = \frac{e^{5t} - e^{-2t}}{t} \quad (1 \text{ pto})$$

P31

a) Trabajando con las componentes

$$f(w'_{ij}) = s f(w_{ij}) - w_{ij}(0)$$

$$\Rightarrow f(w') = s f(w) - I \quad + (1,0)$$

No se puede hacer directo sin el primer paso pues ese resultado solo se había visto para funciones, no matrices.

b) $f(\sum a_{ik} w_{kj}) = \sum a_{ik} f(w_{kj})$ por linealidad

$$\Rightarrow f(Aw) = A f(w) \quad + (1,0)$$

c) $\xi(s) = A - sI$

Si tomamos $p(s) = |A - sI|$ notamos que $p(s)$ es un polinomio de grado n en s . $+(0,2)$

$p(s) = 0$ en sus raíces que son dos, ^{max} si tomamos s_0 como la mayor se cumple que $\forall s > s_0$ $p(s) \neq 0$, por lo tanto, $\xi(s)$ es invertible. $\downarrow + (0,3)$

$\hookrightarrow$ conclusión $+(0,5)$

d) $W' = A W$ por a) y b)

$$s f(w) - I = A f(w) \quad + (0,5)$$

$$-I = (A - sI) f(w)$$

$$f(w) = -(A - sI)^{-1} \quad + (0,3) \text{ resultado}$$

$+(0,2)$ explicar que $(A - sI)^{-1}$ existe $\forall s > s_0$ por c).

$$e) \mathcal{L}(W) = - \begin{pmatrix} -s & b \\ -b & -s \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\mathcal{L}(W) = \begin{pmatrix} s & -b \\ b & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + b^2} \begin{pmatrix} s & b \\ -b & s \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(W) = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 + b^2} & \frac{b}{s^2 + b^2} \\ -\frac{b}{s^2 + b^2} & \frac{s}{s^2 + b^2} \end{pmatrix} + (0, 2)$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} + (0, 2) \text{ por c/n}$$

$$f) \mathcal{L}(W) = - \begin{pmatrix} a-s & b \\ -b & a-s \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\mathcal{L}(W) = \begin{pmatrix} s-a & -b \\ b & s-a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-a)^2 + b^2} \begin{pmatrix} s-a & b \\ -b & s-a \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(W) = \begin{pmatrix} \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} & \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \\ -\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} & \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \end{pmatrix} + (0, 2)$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} + (0, 2) \text{ por c/n}$$