Pauta CR

P1) $x' = \sqrt{|x|}$ $\quad x(0) = 0$

$x(t) \equiv 0$ es solución de la ecuación (1 pto)

Tomemos una solución con c.i. $c > 0$ en t_0.

Mientras $x(t) \neq 0$

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \qquad \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{\sqrt{x(s)}}\, ds = t - t_0$$

sin $|x|$ → pues $c > 0$

$$2x(t)^{1/2} - 2x(t_0)^{1/2} = t - t_0$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(2c^{1/2} + (t - t_0)\right)^2 \qquad (2 \text{ pts})$$

Esta sol se anula si: $2c^{1/2} + (\bar{t} - t_0) = 0$

$$\bar{t} = t_0 - 2c^{1/2}$$

tomando $\bar{t} = 0$ $\qquad t_0 = 2c^{1/2}$

Así obtenemos $x(t) = \frac{1}{4}\left(2c^{1/2} + (t - 2c^{1/2})\right)^2$

$$x(t) = \frac{1}{4}t^2 \quad \text{para } t \geq 0$$

De hecho $x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & t \geq 0 \end{cases}$ es sol de la EDO (es derivable)

análogamente, tomando $c < 0$ se tiene la sol

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$ +(3.0 pts)

Error usual:

tomar como soluciones

$$x_1 = \frac{t^2}{4} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad y \qquad x_2 = -\frac{t^2}{4} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

x_1 cumple la edo para $t \geq 0$, pero con $t < 0$

$$x_1' = \frac{t}{2}, \qquad \sqrt{|x_1|} = \sqrt{\frac{-t^2}{4}} = -\frac{t}{2}$$

esto pues $-t > 0$

x_2 lo mismo pero con $t > 0$

$$x_2' = -\frac{t}{2}, \qquad \sqrt{|x_2|} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{t}{2}$$

Por esto se descontó 0.5 de cada solución.

NOTAS: FECHA / / /

(2) $y' + y^2 = f(t) \quad y(0) = 1/2$

$f(t) = 1 \quad t < 1$

$f(t) = 0 \quad t \geq 1.$

Pruebe que $y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Resolvamos

$y' + y^2 = 1 \qquad y(0) = 1/2$

$y' = 1 - y^2 = (1-y)(1+y)$

$\frac{y'}{(1-y)(1+y)} = 1 \qquad\qquad \frac{1}{(1-y)} + \frac{1}{(1+y)} = \frac{2}{(1-y^2)}$

$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{2(1-y)} + \frac{1}{2(1+y)} = \int_0^t dt = t$

$-\ln|1-y| + \ln|1+y| \Big|_{y(0)}^{y(t)} = 2t$

$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \ln\left|\frac{3/2}{1/2}\right| = 2t$

$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{\ln 3} \cdot e^{2t}$

Como $y(0) = 1/2 < 1$ y no hay cambio de signo

$\frac{(1+y)}{(1-y)} = e^{\ln 3} e^{2t}$

$1 + y = e^{\ln 3} \cdot e^{2t} (1-y) = 3e^{2t}(1-y)$

$y + 3e^{2t} y = 3e^{2t} - 1$

$y(t) = \frac{3e^{2t} - 1}{1 + 3e^{2t}}$ 2,5 pt

$y(1) = \frac{3e^2 - 1}{3e^2 + 1}$ 0,5 pt

Escaneado con CamScanner

Ahora para $t > 1$

$$y' + y^2 = 0 \qquad y(1) = \frac{3e^2-1}{3e^2+1} > 0$$

$$y' = -y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = -1$$

$$\int_1^t \frac{y'}{y^2} = -(t-1)$$

$$\left. \frac{-1}{y} \right|_1^t = -(t-1)$$

$$\frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{y(1)} = -(t-1)$$

$$\frac{1}{y(1)} + (t-1) = \frac{1}{y(t)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{3e^2+1}{3e^2-1} + (t-1) = \frac{1}{y(t)}$$

2.0 pt.

$$y(t) = \frac{1}{\underbrace{\frac{3e^2+1}{3e^2-1} + (t-1)}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

1.0 pt
(límite)

Pauta P3 CR

a) $y' - \frac{y}{x} = x e^{x}$

factor integrante: $e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

Multiplicando la ec. por el factor integrante:

$$\frac{1}{x} y' - \frac{y}{x^2} = e^{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} y\right) = e^{x} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} y(x) = e^{x} + C$$

$$\Rightarrow y(x) = x e^{x} + C x \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

(3 pts)

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2+y^2)}{2xy}$, $v = \frac{y}{x}$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow v x = y \quad / ( )' \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} x + v = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} x + v = -\left(\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dx} x + v = \frac{-v - 1/v}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} x = -\frac{3}{2} v - \frac{1}{2v} = \frac{-3v^2 - 1}{2v}$$

(1 pt.)

$$\Rightarrow \frac{-2v}{3v^2+1} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \quad / \int \quad \Rightarrow \int \frac{-2v}{3v^2+1} dv = \ln|x| + C$$

$$3v^2 + 1 = w$$

$$\frac{dw}{dv} = 6v \rightarrow 2v = \frac{1}{3} \frac{dw}{dv} \quad \Rightarrow \int -\frac{1}{3} \frac{\frac{dw}{dv}}{w} dv = \ln|x| + C$$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3}\ln|w| = \ln|x| + C_1$

$\Rightarrow \quad \ln|w|^{-\frac{1}{3}} = \ln|x| + C_1 \quad / e^{()} \quad y \quad w = 3v^2+1$

$\Rightarrow \quad (3v^2+1)^{-1/3} = cx \qquad (c = e^{c})$

$\Rightarrow \quad 3v^2+1 = cx^{-3} \qquad (c = c^{-3})$

$\Rightarrow \quad 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = cx^{-3}$

$\Rightarrow \quad \frac{3y^2+x^2}{x^2} = cx^{-3}$

$\Rightarrow \quad 3y^2 + x^2 = cx^{-1}$

$\Rightarrow \quad 3y^2 = cx^{-1} - x^2 \qquad$ (2 pts)