1

Pauta Control 2 : P1

P1)

a) (2ptos) $y^{(6)} - y = 0$

Asumiendo que $y(x) = e^{\lambda x}$, para algún λ:

Reemplazando en la ecuación y notando que $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $\ldots$, $y^{(6)} = \lambda^6 e^{\lambda x}$, obtenemos:

$$\lambda^6 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\lambda^6 - 1 = 0 \qquad \cancel{(+0{,}1)}$$

$$\Rightarrow \lambda^6 = 1 \qquad (+0{,}5)$$

Estas son las raíces de la unidad; (+0,5)

Usando que estas son $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ con $k = 0, \ldots, 5$ obtenemos que

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_6 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego la solución queda como: (luego de factorizar y renombrar ctes)

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \left(e^{x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right) + c_4 e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

$$+ c_5 e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + c_6 e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

con $c_1, \ldots, c_6$ ctes.

(+0,5 por poner cuales son las soluciones asociadas a λi)

(+0,5 por llegar a $y(x)$ con las ctes)

②

b) (2 ptos) $y'' - 2y' + y = e^x$

Resolviendo la ecuación homogénea:

$$y_h'' - 2y_h' + y_h = 0$$

Asumiendo que $y_h(x) = e^{\lambda x}$, el polinomio característico queda

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (+0,5)$$

Luego $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$ (+0,5 con las ctes)

Ahora resolvemos la EDO no homogénea vía coeficientes indeterminados, suponiendo que $y_p(x) = a_1 x^2 e^x$ (el x^2 aparece porque ya tenemos a e^x y xe^x en $y_h(x)$) → (+0,2 por notar esto)

Luego, reemplazando y_p en la EDO, nos queda:

$$y_p' = a_1 e^x x^2 + 2a_1 x e^x$$

$$y_p'' = a_1 e^x x^2 + 2a_1 x e^x + 2a_1 x e^x + 2a_1 e^x = a_1(x^2 e^x + 2e^x + 4xe^x)$$

(+0,3)

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x$$

$$\Rightarrow a_1(x^2e^x + 2e^x + 4xe^x) - 2(a_1 e^x x^2 + 2a_1 x e^x) + a_1 x^2 e^x$$

$$= \cancel{2a_1 x^2 e^x} - \cancel{2a_1 x^2 e^x} + 2a_1 e^x + \cancel{4a_1 x e^x} - \cancel{4a_1 x e^x} = e^x$$

$$\Rightarrow 2a_1 e^x = e^x \quad \Rightarrow 2a_1 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{1}{2}} \quad \to (+0,3)$$

$$\therefore y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$ con C_1, C_2 ctes. → (+0,2)

b) Alternativa: Variación de Parámetros

Tenemos que $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$\Rightarrow y_1 = e^x \;,\; y_2 = x e^x$ ¡Notar que la ecuación ya está normalizada!

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - xe^{2x} = e^{2x} + \cancel{xe^{2x}} - \cancel{xe^{2x}} = e^{2x} \neq 0$$

(+0,2)

Tenemos que y_p va a estar dada por:

$$y_p(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$$

$$u_1(x) = -\int \frac{f y_2}{W} = -\int \frac{e^x x e^x}{e^{2x}} = -\int \frac{x e^{2x}}{e^{2x}} = -\int x = -\frac{x^2}{2}$$

(no es necesario tomar + C acá)

($f = e^x$) (+0,3)

$$u_2(x) = \int \frac{f y_1}{W} = \int \frac{e^x e^x}{e^{2x}} = \int 1 = x$$ (+0,3)

Luego:

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} e^x + x^2 e^x = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

$$y = y_h + y_p$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \frac{1}{2}x^2 e^x = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \rightarrow (+0,2)$$

con C_1, C_2 ctes.

c) (2 ptos) $2x^2 y'' + 5xy' + y = x^2$

Aplicando el cambio de variable $x = e^t$ de la indicación, se tiene que: $y(x) = y(e^t) = z(t)$

Luego, por regla de la cadena:

$$z'(t) = x y'(x)$$

$$z''(t) = x y'(x) + x^2 y''(x)$$

Ahora tomando la ecuación original, la reecribimos como:

$$2x^2 y'' + 2xy' + 3xy' + y = x^2$$

$$\Rightarrow 2(x^2 y'' + xy') + 3xy' + y = x^2$$

Aplicando el c.v. y recordando z' y z'':

$$2z''(t) + 3z'(t) + z(t) = e^{2t} \qquad (+0,4)$$

Esta será la ecuación que resolveremos y después sólo devolvemos el c.v.

Homogénea $\quad 2z'' + 3z' + z = 0$. Suponemos que $z(t) = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-1}{2} \qquad (+0,4)$$

$$\Rightarrow z_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ ctes.} \qquad (+0,3)$$

No homogénea

Coefs. Indeterminados:

Como el lado derecho es e^{2t} y este no aparece en z_h, proponemos $z_p = Ae^{2t}$ con A a determinar. Luego,

↳ (+0,2 por notar esto)

$z_p' = 2Ae^{2t}$, $z_p'' = 4Ae^{2t}$ (+0,2)

En la EDO

$\Rightarrow$ $2z_p'' + 3z_p' + z_p = e^{2t}$

$\Rightarrow$ $8Ae^{2t} + 6z_p' + Ae^{2t} = e^{2t}$

$\Rightarrow$ $15Ae^{2t} = e^{2t}$ $\Rightarrow$ $15A = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = \frac{1}{15}}$ (+0,2)

$\Rightarrow$ $z_p(t) = \dfrac{e^{2t}}{15}$

$\Rightarrow$ $z(t) = \dfrac{e^{2t}}{15} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}$ (+0,2)

Recordando que $x = e^t$:

$y(x) = \dfrac{x^2}{15} + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-\frac{1}{2}}$ con c_1, c_2 ctes. (+0,2)

Alternativa: Variación de Parámetros

De la solución homogénea, obtenemos $z_1 = e^{-t}$ y $z_2 = e^{-\frac{t}{2}}$.

Notar que la ecuación no está normalizada!

$$\Rightarrow \quad z'' + \frac{3}{2} z' + \frac{z}{2} = \frac{e^{2t}}{2} \quad , \text{ luego } \quad f = \frac{e^{2t}}{2}$$

y proponemos $z_p = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2$, con μ_1 y μ_2 a determinar.

$$W = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-\frac{t}{2}} \\ -e^{-t} & -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{3t}{2}} + e^{-\frac{3t}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{3t}{2}} \neq 0$$

(+0,2)

luego, por fórmula:

$$\mu_1 = -\int \frac{z_2 f}{W} = -\int \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cancel{\frac{1}{2}} e^{2t}}{\cancel{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3t}{2}}} = -\int e^{-\frac{t}{2}} e^{2t} e^{\frac{3t}{2}}$$

$$= -\int e^{3t} = -\frac{1}{3} e^{3t} \quad (+0,3)$$

$$\Rightarrow \quad \mu_1(t) = -\frac{1}{3} e^{3t}$$

$$\mu_2 = \int \frac{z_1 f}{W} = \int \frac{e^{-t} \cancel{\frac{1}{2}} e^{2t}}{\cancel{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3t}{2}}} = \int e^{-t} e^{2t} e^{\frac{3t}{2}} = \int e^{\frac{5}{2}t} = \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}t}$$

(+0,3)

$$\Rightarrow \quad \mu_2(t) = \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}t}$$

$$\Rightarrow \quad z_p(t) = \mu_1(t) z_1(t) + \mu_2(t) z_2(t) = -\frac{1}{3} e^{3t} e^{-t} + \frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}t} e^{-\frac{t}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{2t} = \frac{-5+6}{15} e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad z_p(t) = \frac{1}{15} e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \frac{e^{2t}}{15} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}$$

. luego, recordando $x = e^t$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{x^2}{15} + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-\frac{1}{2}}$$

con c_1, c_2 ctes.

(+0,2)

P2 a)

$$(D-I)\circ(xD+3I)y$$
$$(D-I)\cdot(xy'+3y)$$
$$D(xy')+3y'-xy'-3y$$
$$y'+xy''+3y'-xy'-3y$$

$$(xD+3I)\circ(D-I)y$$
$$(xD+3I)\circ(y'-y)$$
$$xy''+3y'-xy'-3y$$

1p

No son iguales

1p

b) indicaø

$$(xD+3I)y=z$$

$$\Longrightarrow \quad (D-I)z=0$$
$$z'-z=0$$
$$\frac{z'}{z}=1 \quad \int$$

1p

$$\int\frac{1}{z}=\int 1\,dx$$
$$\ln(z)=x+C$$
$$z=e^xK$$

Reemplazando!

$$(xD+3I)y=e^xK$$
$$xy'+3y=e^xK \rightarrow \text{factor integrante}$$
$$y'+\frac{3y}{x}=\frac{e^xK}{x} \Big/\cdot x^3 \quad \exp\left(\int\frac{3}{x}\right)=\exp\left(3\ln(x)\right)=x^3$$
$$x^3y'+3yx^2=e^xKx^2$$
$$(x^3y)'=e^xKx^2$$

$$(x^3y)' = e^x K x^2 \quad / \int$$

$$\int (x^3y)' = K\int e^x x^2$$

$$x^3 y = K \int e^x x^2$$

$$* \quad \int e^x x^2 = e^x(x^2 - 2x + 2) + C \qquad 1p$$

$$x^3 y = Ke^x(x^2 - 2x + 2) + \frac{C}{x^3}$$

$$y = \frac{Ke^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} + \frac{C}{x^3}$$

c) $(D - I)(xD + 3I)\, y = e^x$ $\Rightarrow$ NO SE PUEDE USAR ANULADOR.

$$(D - I)z = e^x$$
$$(xD + 3I)\, y = z$$

$$\Rightarrow \quad z' - z = e^x$$
$$(e^{-x} z) = 1$$
$$z = e^x x + e^x C \qquad (1p)$$
$$(xD + 3I)\, y = e^x x + e^x C$$

$$xy' + 3y = e^x x + e^x C$$

$$y' - \frac{3y}{x} = e^x + \frac{e^x C}{x} \quad / \cdot x^3$$

$$(yx^3)' = e^x x^3 + e^x x^2 C \quad \int$$

$$yx^3 = \int e^x x^3 + C\int e^x x^2 + C'$$

$$y = \frac{1}{x^3}\int e^x x^3 + \frac{C}{x^3}\int e^x x^2 + \frac{C'}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x^3}\int e^x x^3 + \frac{c}{x^3}\int e^x x^2 + \frac{c}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{\cancel{x^3}}\left(e^x(\cancel{x^3} - 3x^2 + 6x - 6)\right) +$$

$$\frac{c}{x^3}\left(e^x(x^2 - 2x + 2)\right) + \frac{c}{x^3}\Big| \quad 9p$$

Pauta C2 EDO 2023 - 1 Sección 2

P3|

a) Consideremos el PVI

$$\left.\begin{array}{r} y'' + g(x) y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{array}\right\} (I)$$

Como $a_0(x) = g(x)$, $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = 1$ son continuas entonces se cumple TEU.

Luego $y(x) = 0$ es solución de (I) y por TEU es la única.
+0.7 +0.3

Contradicción pues habíamos tomado $y(x) \neq 0$.

b) $u'(x) = \left(y'(x) z(x) - z'(x) y(x)\right)'$

$u'(x) = y''(x) z(x) + \cancel{y'(x) z'(x)} - \left(z''(x) y(x) + \cancel{z'(x) y'(x)}\right)$ +0.5

$u'(x) = y''(x) z(x) - z''(x) y(x)$ / reemplazando $y''(x)$ de (1)
" $z''(x)$ de (2)

$u'(x) = -g(x) y(x) z(x) + h(x) y(x) z(x)$

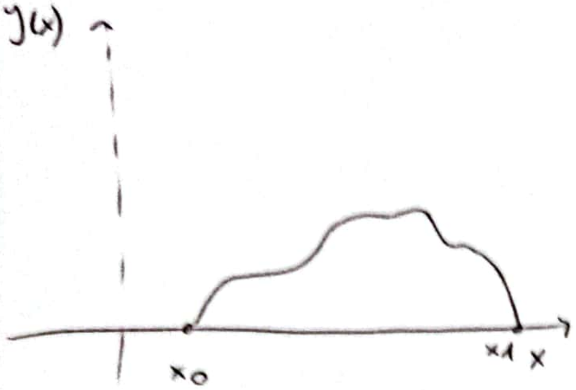
$u'(x) = (h(x) - g(x)) yz$. +0.5

c) $\varphi'(x) = \left(\dfrac{y(x)}{z(x)}\right)'$

$$\varphi'(x) = \frac{y'(x) z(x) - z'(x) y(x)}{z^2(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{u(x)}{z^2(x)}$$ +1.0

d) Bosquejemos $y(x)$



Como $y(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_1]$ entonces $y'(x_0) \geq 0$. Por a) $y'(x_0) \neq 0$,

con lo que $y'(x_0) > 0$.

Procediendo por la indicación

$$\int_{x_0}^{x} u'(s)\, ds = u(x) - u(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x} (h(s) - g(s))\, y(s)\, z(s)\, ds = u(x) - u(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} (h(s) - g(s))\, y(s)\, z(s)\, ds$$

+0.4

Notamos que $\quad u(x_0) = y'(x_0)\, z(x_0) - z'(x_0)\, y(x_0)$

$$u(x_0) = y'(x_0)\, z(x_0) > 0 \qquad +0.3$$

Y además $\quad h(x) - g(x) > 0, \quad y(x) > 0$ con $x \in [x_0, x_1]$, $z(x) > 0$ $x \in [x_0, x_1$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} (h(s) - g(s))\, y(s)\, z(s)\, ds > 0 \quad \text{para } x \in [x_0, x_1]$$

+0.3

Así concluimos $u(x) > 0$ para $x \in [x_0, x_1]$.

e) Si $z > 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$ φ no se indetermina en $[x_0, x_1]$

Luego

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi'(x)\,dx = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{u(x)}{z^2(x)}\,dx = \frac{y(x_1)}{z(x_1)} - \frac{y(x_0)}{z(x_0)}$$

+0.4

+0.3

Como $u > 0$ en $[x_0, x_1]$ y z^2 también $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \varphi'(x)\,dx > 0$, pero

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = \frac{y(x_1)}{z(x_1)} - \frac{y(x_0)}{z(x_0)} = 0 - 0 = 0.$$ ※ contradicción

+0.3

$\therefore \ \exists\, \bar{x} \in [x_0, x_1]$ tal que $z(\bar{x}) = 0$.

+0.3

f) Notemos que $h(x) = 1 + x^2$, $g(x) = 1$ son tales que $h(x) - g(x) > 0$ $\forall x \in (0, \infty)$. Como $y(x) = \cos(x)$ +0.3 es solución no trivial de 1, y como se cumplen las hipótesis podemos usar las partes anteriores para determinar que entre cada 0 consecutivo de $y(x)$ existe un cero de $z(x)$. Finalmente, como $\cos(x)$ tiene infinitos ceros se concluye. +0.4