

P1 El problema se modela con el siguiente sistema

Pablo A. Martiniello  
Romero

$$x_1' = -4 \frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{50} + 3 \cdot 0$$

$$x_2' = 4 \cdot \frac{x_1}{50} - 4 \frac{x_2}{50}$$

$$\Rightarrow x' = Ax \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} \end{pmatrix}$$

Calculamos los vp

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{50} - \lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & -\frac{4}{50} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left( \lambda + \frac{4}{50} \right)^2 - \frac{4}{50^2}$$

$$= \lambda^2 + \frac{8}{50} \lambda + \frac{4^2}{50^2} - \frac{4}{50^2}$$

$$= \lambda^2 + \frac{8}{50} \lambda + \frac{12}{50^2}$$

$$= \left( \lambda + \frac{2}{50} \right) \left( \lambda + \frac{6}{50} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{6}{50}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{50}$$

Calculamos sus vectores propios de forma directa pues no tienen multiplicidad mayor a 1

$$\underline{v_1} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{4}{50} & \frac{2}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v_2} \begin{pmatrix} -\frac{2}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & -\frac{2}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así la solución es

$$X(t) = C_1 e^{\frac{2}{50}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{6}{50}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la c.i.  $x_1(0) = 25$ ,  $x_2(0) = 0$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= C_1 + C_2 = 25 \\ x_2(0) &= 2C_1 - 2C_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow C_1 = \frac{25}{2} = C_2$$

$$X(t) = \frac{25}{2} e^{-\frac{1}{25}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{25}{2} e^{-\frac{3}{25}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{o bien } x_1(t) &= \frac{25}{2} \left( e^{-\frac{1}{25}t} + e^{-\frac{3}{25}t} \right) \\ x_2(t) &= 25 \left( e^{-\frac{1}{25}t} - e^{-\frac{3}{25}t} \right) \end{aligned}$$

Para el diagrama de fase consideramos el c.v.

$$\vec{z} = \vec{P} \vec{x} \quad \text{con } \vec{P} = (P_1, P_2) \quad \text{la matriz de vectores}$$

Propios, en este caso 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que 
$$\vec{x}' = A \vec{x}$$
$$\vec{x}' = A \vec{P} \vec{z} = \vec{P} \vec{z}'$$

$$\Rightarrow \vec{z}' = \vec{P}^{-1} A \vec{P} \vec{z}$$

$$\vec{z}' = D \vec{z}$$

donde  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  (en general la diagonal de valores propios),

en este caso 
$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{50} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{50} \end{pmatrix}$$

Luego es fácil notar que  $z_1' = \lambda_1 z_1$ ,  $z_2' = \lambda_2 z_2$

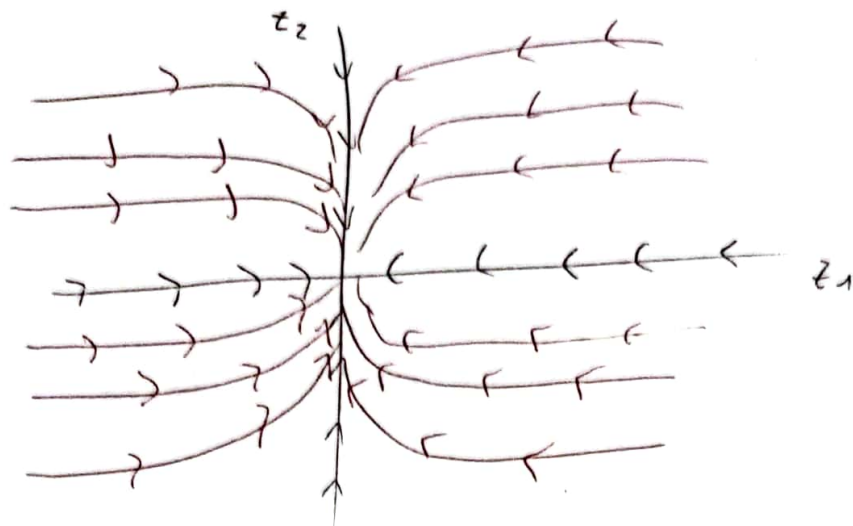
$$\Rightarrow z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_1(0), \quad z_2(t) = e^{\lambda_2 t} z_2(0)$$

Notamos que en ambos casos podemos despejar  $t$  de la siguiente forma

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{z_1(t)}{z_1(0)}, \quad e^{\lambda_2 t} = \frac{z_2(t)}{z_2(0)}$$

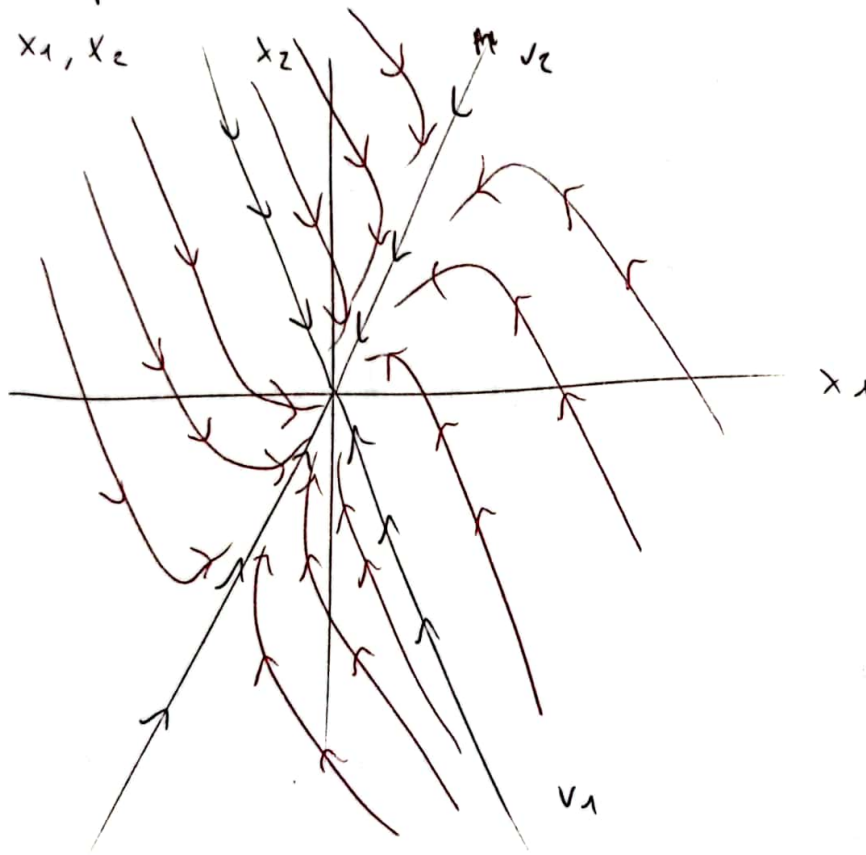
$$\Rightarrow e^t = \left( \frac{z_1(t)}{z_1(0)} \right)^{1/\lambda_1} \Rightarrow \frac{z_2(t)}{z_2(0)} = \left( \frac{z_1(t)}{z_1(0)} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

Con esto podemos empezar a graficar en el plano  $z_1, z_2$



notar que van hacia el origen por ser ambos negativos, además con  $t \rightarrow -\infty$  se van paralelo a  $z_1$  pues  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , lo cual se refleja en la expresión de  $z_2$  en términos de  $z_1$ .

usando los  $\vec{v}_p$  reconvertimos este cambio, quedándonos en el plano  $x_1, x_2$





P2)

El siguiente sistema modela el problema

$$x_1' = -(3-\alpha)x_1 - \alpha x_1 + 3 \cdot 0 = -3x_1$$

$$x_2' = (3-\alpha)x_1 - (3-\alpha)x_2$$

Matricialmente

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3-\alpha & \alpha-3 \end{pmatrix} X \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz es triangular se tiene que  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = \alpha - 3$   
calculamos sus  $\vec{v}_p$

$$(A - \lambda_1 I) \vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3-\alpha)u = -\alpha v$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha-3 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 3-\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u = 0, v \text{ libre}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así la solución general es

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

$$X = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha-3 \end{pmatrix} + c_2 e^{(\alpha-3)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

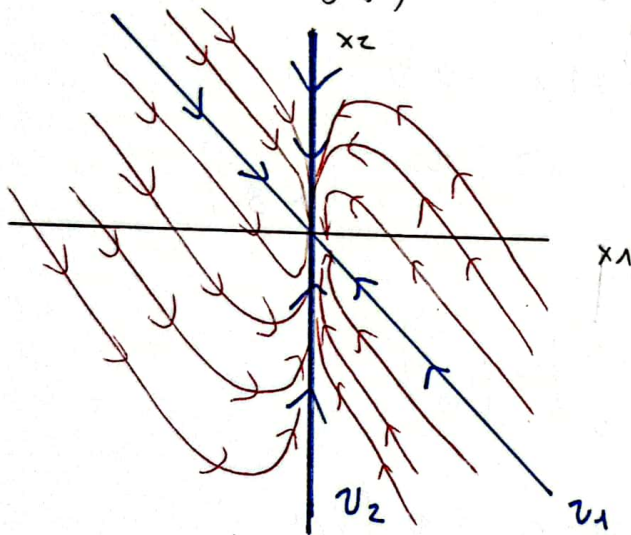
determinemos  $c_1$  y  $c_2$

$$\begin{cases} c_1 \alpha + c_2 \cdot 0 = 1 \\ c_1 (\alpha - 3) + c_2 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1/\alpha \\ c_2 &= \frac{3-\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

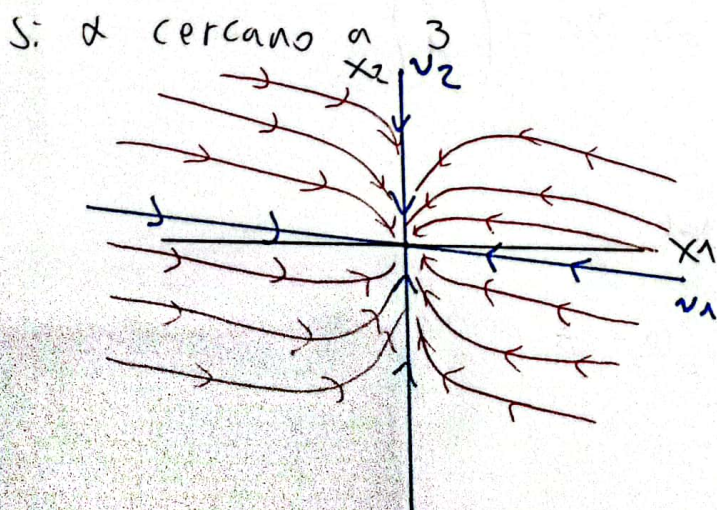
Así  $X = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} + e^{(\alpha-3)t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3-\alpha}{\alpha} \end{pmatrix}$

Notamos que  $x_1$  no depende de  $\alpha$  porque siempre del tanque  $\downarrow$   
 Salen 3L con concentración  $x_1$  y entran 3L con concentración 0.

El diagrama de fase dependerá de  $\alpha$ . Si tomamos un  $\alpha \approx 1,5$   
 (la mitad entre 0 y 3) tendremos



recordemos que  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$   
 $\Rightarrow |\lambda_1| > |\lambda_2|$



Si  $\alpha$  cercano a 0

