

P1

a) Es fácil ver que G es continua, pues $F(x) = \int_a^x f(s) ds$ es continua $\forall x \in [a, b]$ si:
 $f(x)$ es continua en $[a, b]$, luego como $f(x)$ es continua por pedazos se concluye
 pues $G(x) = \int_a^x f(s) ds = \underbrace{\int_a^{x_1} f(s) ds + \int_{x_1}^{x_2} f(s) ds + \dots + \int_{x_n}^x f(s) ds}_{cte} \quad \text{continua } \forall x \in [x_n, x_{n+1}]$

Haremos algo más complicado: Probaremos que si: $f: (x_i, x_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua

$$\Rightarrow G'(t) = f(t) \text{ para } t \in (x_i, x_{i+1})$$

Más aún: $\lim_{t \rightarrow x_i^-} G'(t) = \lim_{t \rightarrow x_i^-} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow x_i^+} G'(t) = \lim_{t \rightarrow x_i^+} f(t)$

$$G(t) = \underbrace{\int_a^{x_i} f(t) dt}_{cte} + \underbrace{\int_{x_i}^t f(s) ds}_{\text{la derivada es } f(t) \text{ por cálculo. (f tiene límite en } x_i)}$$

$$\Rightarrow G'(t) = f(t) \text{ en } (x_i, x_{i+1}).$$

Además $G'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+h} f(s) ds}{h}$ para ver el límite por x_i^+ tomamos $t = x_i + \epsilon$

Como f es continua por tramos el siguiente límite existe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_i + \epsilon) = f(x_i^+)$$

entonces $\forall \delta > 0 \exists \epsilon_0 \forall \epsilon < \epsilon_0 \quad |f(x_i + s) - f(x_i^+)| < \delta \quad \forall s < \epsilon_0$

$$\text{Así } \int_t^{t+h} f(s) ds = \underbrace{\int_t^{t+h} f(x_i^+) ds}_{f(x_i^+)h} + \left[\int_t^{t+h} (f(s) - f(x_i^+)) ds \right]$$

Luego si $|t+h - x_i| < \epsilon_0$ y $|t - x_i| < \epsilon$ así t y $t+h$ están suf. cerca de x_i

$$\Rightarrow \left[|f(t) - f(x_i^+)| \right] < \delta \quad \text{acotamos esto}$$

Con esto

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t) dt - f(x_i^+) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) - f(x_i^+) ds < \frac{h \delta}{h}$$

$$\Rightarrow G'(t) \longrightarrow f(x_i^+) \quad \text{si } t \rightarrow x_i^+$$

Ejercicio: hacer el otro límite de forma análoga.

Por lo tanto $G(t)$ es continua y su derivada es continua por pedruzcos!

Ahora veamos G de orden exponencial:

$$|G(t)| = \left| \int_a^t f(s) ds \right| \leq \int_a^t |f(s)| ds \leq \int_a^t M e^{\alpha t} dt = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{\alpha a}) \leq \bar{M} e^{\beta t}$$

con $\beta = \alpha$ si $\alpha > 0$, $\beta = 0$ si $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$ no podemos hacer esto,

pero en ese caso $\forall \alpha > 0 \exists \bar{M} t_4$

$$|G(t)| \leq M |t - a| \leq \bar{M} e^{\alpha t}$$

b) Recordando:

$$\left[\mathcal{L}(y^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(y(t))(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \right]$$

obs: derivada + orden de s suman $n-1$

$$\mathcal{L}(G') = s \mathcal{L}(G(t))(s) - G(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(G(t))(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(G') + \frac{1}{s} G(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_a^t f(x) dx\right)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f) + \frac{1}{s} \int_a^0 f(x) dx$$

P2] Por definición

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= \mathcal{L}(f(t))(s-a)\end{aligned}$$

P3] Dem: $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$

$$= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt + \dots$$

Luego, tomando $t = x + np$ en la $(n+1)$ -ésima integral

$$\begin{aligned}\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^p e^{-s(x+np)} f(x+np) dx \\ &= e^{-nps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx\end{aligned}$$

(por periodicidad)

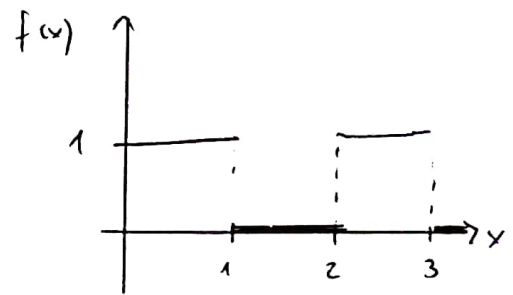
con esto tenemos

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^p e^{-sx} f(x) dx + e^{-ps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx + \dots + e^{-nps} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx + \dots$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \underbrace{(1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + \dots)}_{\text{Serie geométrica}} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx} f(x) dx \quad \text{con lo que se concluye.}$$

b) Notamos que $f(x)$ es de periodo $p=2$ y
 $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \Rightarrow$ es de orden exponencial



Luego

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^2 0 dt}{1 - e^{-2s}}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}}{1 - e^{-2s}}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1 - e^{-s}}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} \right)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$

P4)

a) Usando la P2) $\mathcal{L}(e^{-3t} \cos(2t+4))(s) = \mathcal{L}(\cos(2t+4))(s+3)$

Recordo: $\mathcal{L}(\cos(at+b)) = \frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2 + a^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(e^{-3t} \cos(2t+4))(s) = \frac{(s+3) \cos(4) - 2 \sin(4)}{s^2 + 4}$$

b) $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{1/2} 0 dt + \int_{1/2}^{\infty} (1+t) e^{-st} dt$

$$= \int_0^{\infty} (t + 3/2) e^{-s(t+1/2)} dt$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = e^{-s/2} \left[\int_0^{\infty} t e^{-st} dt + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right]$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = e^{-s/2} \mathcal{L}(f)(s) + \frac{3}{2} e^{-s/2} \mathcal{L}(f)(s)$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{e^{-s/2}}{s^2} + \frac{3e^{-s/2}}{2s}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{e^{-s/2} (3s+2)}{2s^2}$$

P5)

$$a) y'' + 4y' + 4y = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ e^{-(t-2)} & t > 2 \end{cases}, \text{ con } y(0) = 1, y'(0) = -1$$

Calculemos las transformadas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'') &= s^2 \mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(y) - s + 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(4y') = 4\mathcal{L}(y') = 4(s\mathcal{L}(y) - y(0)) = 4s\mathcal{L}(y) - 4$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(0) &= 0 \\ \mathcal{L}(e^{-(t-2)}) &= \mathcal{L}(e^2 e^{-t}) = e^2 \mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{e^2}{s+1} \end{aligned}$$

Luego, reemplazando

$$s^2 \mathcal{L}(y) - s + 1 + 4s\mathcal{L}(y) - 4 + \mathcal{L}(y) = \frac{e^2}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2 + 4s + 4) = \frac{e^2}{s+1} + s + 3$$

$$\mathcal{L}(y)(s) \cdot (s+2)^2 = \frac{e^2}{s+1} + s + 3$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{e^2}{(s+1)(s+2)^2} + \frac{s}{(s+2)^2} + \frac{3}{(s+2)^2}$$

Usando la p2

$$\mathcal{L}(e^{2t} y(t))(s) = \frac{e^2}{s^2(s-1)} + \frac{s-2}{s^2} + \frac{3}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{2t} y(t))(s) = \frac{e^2}{s-1} - \frac{(e^2 s + e^2)}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \quad / \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$e^{2t} y(t) = e^2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - e^2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - e^2 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$e^{2t} y(t) = e^2 \cdot e^t - e^2 - t e^2 + 1 + t$$

$$y(t) = e^{-2t} (e^{t+2} - e^2 - t e^2 + t + 1)$$

$$(*) \quad \frac{e^2}{s^2(s-1)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{Bs+C}{s^2}$$

$$\Rightarrow As^2 + Bs^2 + Cs - Bs - C = e^2$$

$$A = -B$$

$$B = C$$

$$C = -e^2$$