



Auxiliar 9

Más transformadas de Laplace

Profesor: Salomé Martínez S.

Auxiliares: Rodrigo Altamirano M., Sofía Callejas D., Paolo Martiniello R.

P1) Transformación de la derivada

Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de orden exponencial y continua por pedazos. Sea $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ con $a \geq 0$

(a) Pruebe que $G(t)$ es continua y de orden exponencial.

(b) Pruebe que $\mathcal{L}(\int_a^t f(x)dx)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f) + \frac{1}{s}\int_a^0 f(x)dx$

P2) Primer teorema de traslación

Demuestre que $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s - a)$

P3) Transformada de una función periódica

(a) Demuestre que si f es de orden exponencial y también periódica de periodo p entonces

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\int_0^p e^{-st}f(t)dt}{1 - e^{-ps}}$$

(b) Use lo anterior para calcular la transformada de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in (2n, 2n+1), n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{para } x \in (2n+1, 2(n+1)), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

P4) Calcular Transformadas

Calcule las siguientes transformadas de Laplace:

(a) $e^{-3t}\cos(2t+4)$

(b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \frac{1}{2} \\ 1+t & \text{para } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

P5) EDOs con Transformadas

Resuelva la siguiente EDO:

$$(a) \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \begin{cases} 0, & t \leq 2; \\ e^{-(t-2)}, & t > 2; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$