

# Auxiliar 6

Sistemas homogéneos de orden  $n$

**Profesor: Salomé Martínez S.**

Auxiliares: Rodrigo Altamirano M., Sofía Callejas D., Paolo Martiniello R.

## P1) Funciones linealmente independientes

Determine si las siguientes funciones son l.i. en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

(a)  $f_1 = e^x$ ,  $f_2 = e^{-x}$

(c)  $f_1 = 1 + x$ ,  $f_2 = x^2$ ,  $f_3 = x$

(b)  $f_1 = 5$ ,  $f_2 = \cos^2(x)$ ,  $f_3 = \sin^2(x)$

(d)  $f_1 = e^x$ ,  $f_2 = e^{-x}$ ,  $f_3 = \sinh(x)$

## P2) Un problema con condiciones de borde

Estudie cuándo el problema con condiciones de borde

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) = y(\pi) &= 0\end{aligned}$$

tiene solución no trivial. Pruebe que tiene solución si y solo si  $\lambda = k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$

**Indicación:** Estudie los casos  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $\lambda > 0$ .

## P3) Una función periódica

Considere la ecuación lineal de 2º orden

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{1}$$

con  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y ambas con periodo  $T > 0$ .

(a) Demuestre que  $y$  solución de (1) es periódica si y solo si  $y(0) = y(T)$  y  $y'(0) = y'(T)$ .

(b) Sean  $y_1, y_2$  soluciones de (1) linealmente independientes tales que

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 0 \\ y_1'(0) &= 0, \quad y_2'(0) = 1\end{aligned}$$

Demuestre que (1) tiene una solución no trivial periódica si y solo si

$$1 + e^{\int_0^T a(s)ds} - y_1(T) - y_2'(T) = 0 \tag{2}$$

#### P4) (Propuesto) Otro problema con valores en la frontera

Resuelva la siguiente EDO

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

y determine si existe una solución que satisfaga las siguientes condiciones de frontera

(a)  $y(0) = 1, y'(\pi) = 0$

(c)  $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 1$

(b)  $y(0) = 1, y(\pi) = -1$

(d)  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$