

Aux 6

P1) a) Usando el Wronskiano

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

$$= f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)$$

$$= -e^x e^{-x} - e^{-x} e^x$$

$$= -1 - 1 = -2 \neq 0$$

con lo que son l.i. pues $W \neq 0$ es necesario y suficiente

$$b) W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 5 & \cos^2(x) & \sin^2(x) \\ 0 & -2\cos(x)\sin(x) & 2\cos(x)\sin(x) \\ 0 & 2(\sin^2(x) - \cos^2(x)) & -2(\sin^2(x) - \cos^2(x)) \end{vmatrix}$$

$$= 5 \left[4\cos(x)\sin(x)(\sin^2(x) - \cos^2(x)) - 4\cos(x)\sin(x)(\sin^2(x) - \cos^2(x)) \right]$$

$$= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ son l.d.

$$c) W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1+x & x^2 & x \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+x) \cdot 2 + x^2 \cdot 0 + x \cdot 2 = -2 + 2x$$

d) Sabemos que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Luego, usando la definición de independencia lineal $e^x, e^{-x}, \sinh(x)$ serán l.i. si:

$$\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma \sinh(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Pero tomando $\alpha = 1/2, \beta = 1/2, \gamma = -1$ tenemos que

$$\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \sinh(x) = 0$$

con lo que son l.d.

Propuesto: Hacerlo con Wronskiano.

P21 Analicemos con $\lambda = 0$. ~~Analicemos~~ como la función es una EDO homogénea a coef. ctes analizamos su polinomio característico

$$d^2 + \lambda = 0$$

como $\lambda = 0 \Rightarrow d = 0$ (sol real, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

$\Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$ es solución.

Veamos las condiciones de borde.

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = C_2 \pi e^\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 0$$

$\Rightarrow$ la solución es trivial.

S: $\lambda < 0$ entonces

$$d^2 + \lambda = 0$$

$$d^2 = -\lambda > 0$$

$$d = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$\Rightarrow y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ es solución de la EDO

luego

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y(\pi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

como vimos que e^x y e^{-x} son li $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

$\Rightarrow$ la solución es trivial.

S: $\lambda > 0$ entonces

$$d^2 + \lambda = 0$$

$$d^2 = -\lambda < 0$$

$$d = \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\text{Parte imaginaria}} i + \underbrace{0}_{\text{Parte real}}$$

WDD

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi)$$

Subemos que $\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Aor si: $\sqrt{\lambda}\pi \neq k\pi \Rightarrow C_2 = 0$ y la sol es trivial

Sino $\sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda = k^2$ y como $\lambda \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$

y la sol es $y(x) = C_2 \sin(kx)$ con $k \neq 0$.

P31

a) Sea $z(t) = y(t+T)$. z es sol de (1) ^{clara}

$$\text{ya que } z'' = y''(t+T) = -a(t+T)y'(t+T) - b(t+T)y(t+T)$$

$$z''(t) = -a(t)z'(t) - b(t)z(t)$$

$$z(0) = y(T), \quad z'(0) = y'(T)$$

~~Si y es T periódica~~

$$y(T) = y(0) \Rightarrow z(0) = y(0)$$

$$y'(T) = y'(0) \Rightarrow z'(0) = y'(0)$$

por lo tanto $z(t) = y(t+T) = y(t) \quad \forall t$

i.e: y T periódica.

Por otra parte, si $y(t)$ es T periódica

$$y(t+T) = y(t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow y'(t+T) = y'(t) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow y(0) = y(T)$$

$$y'(0) = y'(T)$$

b) Sea y solución de (1) $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad \text{pues } y_1, y_2 \text{ son l.i.}$$

$$y(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$$

$$y(T) = \alpha y_1(T) + \beta y_2(T)$$

Para que y sea periódica

$$x = \alpha y_1(T) + \beta y_2(T)$$

$$y'(0) = \alpha y_1'(0) + \beta y_2'(0) = \beta$$

$$y(T) = \alpha y_1(T) + \beta y_2(T) \rightarrow \alpha y_1(T) + \beta y_2'(T) = \beta$$

Con eso el sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) - 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tendrá solución no trivial $\Leftrightarrow$ el determinante de la matriz es 0 (lineal, es por ser un sistema homogéneo)

La matriz se parece a $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

De hecho

$$\begin{vmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) - 1 \end{vmatrix} = (y_1(T) - 1)(y_2'(T) - 1) - y_2(T) y_1'(T) \\ = y_1(T) y_2'(T) - y_1(T) - y_2'(T) + 1 - y_2(T) y_1'(T) \\ = \underbrace{y_1(T) y_2'(T) - y_2(T) y_1'(T)}_{W(y_1, y_2)(T)} - y_1(T) - y_2'(T) + 1$$

Se parece caleta a lo que buscamos.
Trabajemos $W(y_1, y_2)$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\begin{aligned} \text{notamos que } W'(y_1, y_2) &= \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_1'' y_2 \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1 (-a(t) y_2' - b(t) y_2) - y_2 (-a(t) y_1' - b(t) y_1) \\ &= -a(t) (y_1 y_2' - y_2 y_1') \end{aligned}$$

$$W'(y_1, y_2)(t) = -a(t) W(y_1, y_2)(t)$$

EDO en W , sale con factor integrante

(*)

$$(*) \quad W(y_1, y_2)(t) = \underbrace{W(y_1, y_2)(0)} e^{-\int_0^t a(s) ds}$$

Fórmula
de Abel

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{-\int_0^t a(s) ds}$$

$$W(y_1, y_2)(t) = e^{-\int_0^t a(s) ds}$$

Reemplazando tenemos

$$1 + e^{-\int_0^T a(s) ds} - y_2'(T) - y_1(T) = 0$$

P4) Como la EDO es una ec de coef ctes usamos el polinomio característico

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$\text{Sol } c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

$$a) y(0) = 1, y'(\pi) = 0$$

$$y(0) = c_1 = 1$$

~~$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$~~

$$y'(x) = c_1 e^x \cos x - c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

$$y'(\pi) = -e^\pi - c_1 e^\pi = 0$$
$$-c_1 e^\pi = e^\pi$$
$$c_1 = -1$$

$$\text{Sol } e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$b) y(0) = 1 \rightarrow c_1 = 1 \quad \text{por a)}$$

$$y(\pi) = -e^\pi = -1$$

no hay solución

$$c) y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 e^{\pi/2} = 1$$

$$C_2 = e^{-\pi/2}$$

$$\text{Sol: } e^x \cos x + e^{-\pi/2} e^x \sin x$$

$$d) y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = \underbrace{C_1}_0 e^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Sol} = C_2 e^x \sin x \quad C_2 \in \mathbb{R}$$