

P20) a) $y' + y = 3 \cos(x)$ / f.i. e^x Paolo Martinello P.

$$(ye^x)' = 3e^x \cos(x) \quad / \int$$

$$ye^x = 3 \int e^x \cos(x)$$

$$ye^x = \frac{3}{2} [e^x \cos(x) + e^x \sin(x)] + C$$

$$y = \frac{3}{2} (\cos(x) + \sin(x)) + Ce^{-x}$$

b) $y' - \frac{2}{x} y = x^2$ / f.i. $\frac{1}{x^2}$ me comi la matriz pero es pa hacer la pinta rápido.

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = 1$$

$$y = x^3 + Cx^2$$

$$y(1) = 1 + C = 3 \Rightarrow C = 2$$

c) tomamos $z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = yz$
 $y'' = z'y + z^2 y$

reemplazando

$$zy' + y'z + a(x)y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{y}$$

$$z' + \left(\frac{y'}{y}\right)z + a(x) = 0$$

$$z' + z^2 + a(x) = 0$$

d) $y = A \sin x + B \cos x \Rightarrow y' = A \cos x - B \sin x$

reemplazando $\Rightarrow A \cos x - B \sin x + 3A \sin x + 3B \cos x = 0$

$$(3A - B) \sin x + (A + 3B) \cos x = 0$$

Como sabemos que $\cos x$ o $\sin x$ son li
 $\Rightarrow \text{I} (3A - B) = \text{II} (A + 3B - 1) = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \beta \quad \textcircled{I}$$

$$\textcircled{II} \quad 10 \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = 1/10$$

$$\beta = 3/10$$

resolviendo la EDO

$$y' + 3y = \cos(x) \quad / \quad f(x) = e^{3x}$$

$$(ye^{3x})' = e^{3x} \cos x \quad / \int$$

$$ye^{3x} = \frac{3e^{3x} \cos x + e^{3x} \sin x}{10} + C$$

$$y = \frac{3 \cos x + \sin x}{10} + Ce^{-3x}$$

P1) La función es duramente continua en x (es cte)

a) Si tomamos $\varepsilon \in (0, 1)$ duramente la función tiene pendiente en y acotada $\forall y \in [4-\varepsilon, 4+\varepsilon]$ con lo que es Lipschitz local y cumple TEU

b, c) No cumple TEU porque $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ (análogamente -3) donde la función ~~se~~ tiene pendiente arbitrariamente grande en y con lo que no es Lipschitz

d) No pues la función ni siquiera está definida en $\mathbb{R}$ para $y = 1$

$$P2) \quad g(x, y) = y' = a_1 f(x)(1-y(x)) - a_2 y(x)$$

g es duramente continua en x por álgebra de continuas.

Veamos si es Lipschitz c/r a la 2da variable.

$$\begin{aligned} & |a_1 f(x)(1-y_1(x)) - a_2 y_1(x) - [a_1 f(x)(1-y_2(x)) - a_2 y_2(x)]| \\ &= |a_1 f(x) - a_1 y_1(x)f(x) - a_2 y_1(x) - a_1 f(x) + a_1 y_2(x)f(x) + a_2 y_2(x)| \\ &= |a_1 f(x)(y_2(x) - y_1(x)) + a_2(y_2(x) - y_1(x))| = |(a_1 f(x) + a_2)(y_2(x) - y_1(x))| \\ &= |a_1 f(x) + a_2| \cdot |y_1 - y_2| \leq |a_1 M + a_2| |y_1 - y_2| = L |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

c) Pues como $f(x)$ es acotada $\exists M \geq 0$ t.q. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq 0$
y positiva

Con esto la función es Lipschitz y cumple TEG global.

Encontremos la solución:

Reordenando la ecuación tenemos

$$y' + (a_1 f(x) + a_2) y = a_1 f(x) \quad / \quad \int \cdot e^{\int (a_1 f(x) + a_2) dx}$$

$$= e^{a_1 F(x) + a_2 x}$$

$$(y e^{a_1 F(x) + a_2 x})' = a_1 e^{a_1 F(x) + a_2 x} f(x) \quad / \quad \int$$

$$y e^{a_1 F(x) + a_2 x} = \int a_1 e^{a_1 F(x) + a_2 x} f(x) dx$$

$$y e^{a_1 F(x) + a_2 x} = \int_0^x a_1 e^{a_1 F(t) + a_2 t} f(t) dt + C$$

Evaluando en 0, como $F(0) = 0$, tenemos que $C = y_0$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{-a_1 F(x) - a_2 x} + e^{-a_1 F(x) - a_2 x} \int_0^x a_1 e^{a_1 F(t) + a_2 t} f(t) dt$$

Luego como todos los términos, ie: exp, a_1 , a_2 , x , y_0 , son ≥ 0

$y \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

b) Sea $D(x) = a_1 F(x) + a_2 x$

$$y = y_0 e^{-D(x)} + e^{-D(x)} \int_0^x \underbrace{a_1 f(t)}_{\text{convertimos en } D'(t)} e^{D(t)} dt$$

$$y = y_0 e^{-D(x)} + e^{-D(x)} \int_0^x (a_1 f(t) + a_2) e^{D(t)} dt - \int_0^x a_2 e^{D(t)} dt$$

$$y = y_0 e^{-D(x)} + e^{-D(x)} \int_0^x (e^{D(t)})' dt - \int_0^x a_2 e^{D(t)} dt$$

$$y = y_0 e^{-D(x)} + e^{-D(x)} \underbrace{(e^{D(x)} - 1)}_{\substack{\downarrow \\ e^{D(0)}}} - \underbrace{\int_0^x a_2 e^{D(t)} dt}_{\geq 0} \leq y_0 e^{-D(x)} + e^{-D(x)} (e^{D(x)} - 1)$$

9) Por a) Subemos $0 \leq y$
combinado con b)

$$0 \leq y \leq y_0 e^{-D(x)} + 1 - e^{-D(x)} = 1 - e^{-D(x)} \underbrace{\left(\frac{1 - y_0}{e^{D(x)}} \right)}_{\in [0,1] \text{ por enumerados}} \leq 1$$

≥ 0

con lo que se concluye $y \in [0,1] \quad \forall x \geq 0$

3) Resolvamos la EDO primero

$$(x-1)y' = (y-1)(y-2)$$

$$\frac{y'}{(y-1)(y-2)} = \frac{1}{(x-1)} \quad \bigg/ \int dx$$

con $z=y$
 $dz = \frac{dy}{dx} dx$

$$\int \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\int \frac{1}{z-2} dz - \int \frac{1}{z-1} dz = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\ln(|z-2|) - \ln(|z-1|) = \ln(|x-1|) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left(\left|\frac{y-2}{y-1}\right|\right) = \ln(|x-1|) + C \quad \bigg/ e^{(\ast)}$$

$$\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = k |x-1| \quad k > 0$$

$$\frac{y-2}{y-1} = k'(x-1)$$

$k' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ otra cte

$$y = \frac{2 + k'(x-1)}{1 - k'(x-1)}$$

a) ¿Cuándo cumple TEU?

Notamos que la función $f = \frac{(y-1)(y-2)}{x-1}$ es continua $\forall x \neq 1$

$$y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y-3}{x-1} \quad \text{también}$$

con lo que es localmente Lipschitz $\forall x \neq 1$ y cumple TEU local.

Casos con $x=1$

notamos que $y=1$ es una solución que cumple la EDO e $y(1)=1$.

Esta solución es única porque no aparece en la sd general.

b) Reemplazando $x=1$ en la solución encontrada tenemos que

$\forall K' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (esta restricción pq viene de $\pm e^c$) $y(1)=2$.

con lo que hay infinitas soluciones.

c) Cualquier otro caso ~~de~~ $x=1$ $y \neq 1$ ~~y~~ $y(1)=2$ no hay solución

¡Éxito!