Auxiliar 3

Teorema de existencia y unicidad

Profesor: Salomé Martínez S.
Auxiliares: Rodrigo Altamirano M., Sofía Callejas D., Paolo Martiniello R.

P0) Del aux pasado

(a) Determine la solución de la ecuación:

$$y' + y = 3cos(x)$$

Después verifique que, independientemente del valor inicial, la solución $y(x)$ tiende a una función periódica cuando $x \to \infty$.

(b) Resuelva el siguiente problema de Cauchy:

$$(PC)\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(c) Pruebe que el cambio de variable $z = \frac{y'}{y}$ transforma la EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)y = 0$$

en la ecuación de Ricatti $z' + z^2 + a(x) = 0$.

(d) Determine los valores de A y B para que la función $Asin(x)+Bcos(x)$ sea solución de $y' + 3y = cos(x)$ y determine la solución general de esta ecuación.

P1) Aplicando el TEU local

Determine si la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tiene una solución única que pasa por los siguientes puntos.

(a) $(1, 4)$

(b) $(5, 3)$

(c) $(2, -3)$

(d) $(-1, 1)$

P2) TEU global

Sean $a_1,\ a_2 \geq 0$ y $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva y acotada. Considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$(PC) \begin{cases} y'(x) = a_1 f(x)(1 - y(x)) - a_2 y(x),\ x \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

(a) Demuestre que existe una única solución global para (PC) y encuéntrela. Puede serle útil considerar

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds$$

Concluya que $\forall x \geq 0,\ y(x) \geq 0$.

(b) A partir de la expresión encontrada para y en la parte anterior demuestre que

$$y(x) \leq y_0 e^{-[a_1 F(x) + a_2 x]} + e^{-[a_1 F(x) + a_2 x]}(e^{[a_1 F(x) + a_2 x]} - 1)$$

(c) Concluya que $\forall x \geq 0,\ y(x) \in [0, 1]$

P3) Más TEU local

Considere el siguiente problema de Cauchy:

$$(PC) \begin{cases} (x - 1)y' = (y - 1)(y - 2) \\ y(a) = b \end{cases}$$

Indique bajo qué condiciones se cumplen los siguientes casos:

(a) El problema tiene solución única.

(b) El problema tiene solución pero no es única.

(c) El problema no tiene solución.