

Auxiliar extra 1

Preparación C1

Profesora: Salomé Martínez S.

Auxiliares: Rodrigo Altamirano M., Sofía Callejas D., Paolo Martiniello R.

P1) P2 C1 2013

Considere la siguiente ecuación con condición inicial la cual puede ser usada para modelar la evolución de una población en que la tasa de crecimiento depende del tiempo y del tamaño de la población:

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(1 - N), N(0) = N_0 \quad (1)$$

La función $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo $T > 0$, por lo cual este modelo considera efectos estacionales en la tasa de crecimiento. Llamamos $\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a(s)ds$ al promedio de a . El propósito de este problema es estudiar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación en términos de $\bar{a}$.

(a) Demuestre que la solución de (1) está dada por :

$$N(t) = \frac{N_0}{(1 - N_0)e^{-B(t)}e^{-t\bar{a}} + N_0},$$

donde $B(t) = \int_0^t (a(s) - \bar{a})ds$.

Indicación: Pruebe que $N(t) = \frac{N_0}{(1-N_0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + N_0}$ y a partir de esto deduzca la fórmula.

(b) Demuestre que si $0 < N_0 < 1$ entonces la solución de (1) está definida en $\mathbb{R}$ y satisface $0 < N(t) < 1$.

(c) Demuestre que si $\bar{a} = 0$ entonces, todas las soluciones de (1) con $0 \leq N_0 \leq 1$ tienen período T .

(d) Pruebe que si $0 < N_0 < 1$ y $\bar{a} < 0$, entonces $N(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y $N(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow 0$, mientras que si $\bar{a} > 0$, entonces $N(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow \infty$ y $N(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$.

Indicación: Pruebe que existen constantes positivas C_1, C_2 tal que $C_1 < e^{-B(t)} < C_2$ para todo t y use la fórmula de la parte a).

P2) Ecuaciones separables

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones. ¿En qué intervalos están bien definidas sus soluciones?

(a) $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

(b) $dx + e^{3x}dy = 0$

(c) $y' = y - y^2$

P3) Cambios de variables

Resuelva las siguientes EDOs usando los cambios de variable correspondientes, identificando qué tipo de ecuación son.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

(b) $t^2 \frac{dy}{dt} + y^2 = ty$

(c) $\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

(d) $ydx = 2(x+y)dy$

(e) Determine las soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

Donde $y_1 = 2/x$ es solución conocida de la ecuación.

(f) En el estudio de la población dinámica uno de los más famosos modelos para un crecimiento poblacional limitado es la **ecuación logística** $\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$ donde $a, b > 0$. Resuelva esta EDO usando el cambio de variable adecuado.

P4) Resolviendo más ecuaciones

(a) Determine la solución de la ecuación:

$$y' + y = 3\cos(x)$$

Después verifique que, independientemente del valor inicial, la solución $y(x)$ tiende a una función periódica cuando $x \rightarrow \infty$.

(b) Resuelva el siguiente problema de Cauchy:

$$(PC) \begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(c) Pruebe que el cambio de variable $z = \frac{y'}{y}$ transforma la EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)y = 0$$

en la ecuación de Ricatti $z' + z^2 + a(x) = 0$.

(d) Determine los valores de A y B para que la función $A\sin(x) + B\cos(x)$ sea solución de $y' + 3y = \cos(x)$ y determine la solución general de esta ecuación.