P_1

Se pide resolver la ec de ondas para $x \in \mathbb{R}$ con CI dadas por:

$$\boxed{(P) = \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}}$$

Aplicando TF c/r a x a la ec y considerando que $\widehat{\frac{\partial}{\partial x} f(x)}(s) = ik\hat{f}(k)$ (acá se asume la notación que $\mathcal{F}[f(x)](k) = \hat{f}(k)$):

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

$\mathcal{F}[u(x)](k)$

no transforma en t

$$\hat{u}_{tt} = c^2 (ik)^2 \hat{u} \quad / \hat{u}(k,t)$$

sale por linealidad de TF

al derivar por prop de TF suelta estos terminos

Las derivadas parciales r/a t pasan a ser totales en el dominio de Fourier k ya que para efectos de la variable t, k es un cte más

$$\Rightarrow \hat{u}'' = -c^2 k^2 \hat{u}$$ EDO para $\hat{u}(k,t)$

Es un oscilador armonico por lo que su solución es conocida e igual a:

$$\hat{u}(k,t) = A\cos(ckt) + B\sin(ckt) \quad (*)$$

Para hallar las ctes A y B (que en realidad no son ctes como vamos a ver ahora) aplicamos TF a las CI:

$$u(x,0) = f(x)$$

$\mathcal{F}[\,](k)$

$$\hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$$

Evaluando para la expresión $\hat{u}(k,t)$ $(*)$:

$$\hat{u}(k,0) = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + \cancel{B\sin(0)} = \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \hat{f}(k)}$$

Ahora para la otra CI lo mismo:

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$\mathcal{F}[\,](k)$

$$\hat{u}_t(k,t) = \hat{g}(k)$$

Derivando r/a t $\hat{u}(k,t)$:

$$t=0 \quad \hat{u}_t(k,t) = -Ack\sin(ckt) + Bck\cos(ckt)$$

$$\hat{u}_t(k,0) = \cancel{-Ack\sin(0)} + Bck\underbrace{\cos(0)}_{1} = \hat{g}(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\hat{g}(k)}{ck}}$$

Por lo tanto la sol general de $\hat{u}(k,t)$ es:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(ckt) + \frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)$$

Para obtener $u(x,t)$ simplemente aplicamos antitransformada:

$$u(x,t) = \left(\hat{u}(k,t)\right)^{\vee} = \underbrace{\left[\hat{f}(k)\cos(ckt)\right]^{\vee}}_{\alpha(x,t)} + \underbrace{\left[\frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)\right]}_{\beta(x,t)}$$

Calculemos $\alpha(x,t)$ y $\beta(x,t)$ separadamente:

$$\left[\hat{f}(k)\cos(c^2k^2t)\right]^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\cos(ckt)e^{ikx}\,dk \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\left(\frac{e^{ickt}+e^{-ickt}}{2}\right)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(ct+x)}\,dk}_{\substack{\text{def anti TF}\\ = f(x+ct)}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x-ct)}\,dk}_{= f(x-ct)}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$ / solución de D'Alambert

Ahora resolvemos $\beta(x,t)$:

$$\beta(x,t) = \left[\frac{\hat{g}(k)}{k}\sin(ckt)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ck}\sin(ckt)\,e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{g}(k)}{ck}\,\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ikct}-e^{-ikct}}{i}\right)e^{ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(k)\,\frac{e^{ik(x+ct)}-e^{ik(x-ct)}}{ik}\,dk$$

$$\frac{e^{ik(x+ct)}-e^{ik(x-ct)}}{ik} = \int_{x-ct}^{x+ct} e^{iku}\,du$$

parece trucazo pero vean lo que pasa

Fubini (se asume que integral converge es decir que $g \in L^2$ $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$)

$$= \frac{1}{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \int_{x-ct}^{x+ct} e^{iku}\, du\, dk$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{iku} dk}_{\text{anti TF de } \hat{g}(k) \text{ evaluada en } u} \Big) du$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\, du$$

Por lo que la sol $u(x,t)$ es:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u) du}$$

P_2

Queremos resolver la ec diferencial de Airy dada por:

$$y''(x) - x\, y(x) = 0$$

Aplicamos TF a ver qué pasa:

$$\mathcal{F}[y''](k) - \mathcal{F}[xy](k) = 0$$

$$(ik)^2 \mathcal{F}[y](k) - \mathcal{F}[xy(x)](k) = 0$$

analicemos esto con más detalle

$$\mathcal{F}[xy(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x) \underbrace{\left[x e^{-ikx}\right]}_{= i \frac{d}{dk} e^{-ikx}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\; i \frac{d}{dk}\left(e^{-ikx}\right) dx$$

$$= i \frac{d}{dk}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-ikx} dx}_{= \hat{y}(k)}\Big)$$

sale fuera de la integral pq lo otro no depende de k

$$= i \frac{d}{dk}\hat{y}(k)$$

Por lo tanto la ec de Airy al aplicar TF toma la sgte forma

$$-k^2 \hat{y}(k) - i\, \hat{y}'(k) = 0$$

$$\hat{y}'(k) = i k^2 \hat{y}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(k) = A e^{i\int k^2 dk}$$

$$\boxed{\hat{y}(k) = Ae^{i\frac{k^3}{3}}}$$

Aplicando anti TF tenemos la sol general:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{ik^3/3} e^{ikx}\,dk$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(kx+\frac{k^3}{3}\right)}\,dk$$
$$= \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(kx+\frac{k^3}{3}\right)dk}_{\text{si } A = C\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} + \underbrace{\frac{iA}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(kx+\frac{k^3}{3}\right)dk}_{D\,Bi(x)}$$
$$= C\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(kx+\frac{k^3}{3}\right)dk}_{=C\,Ai(x)}$$

$\therefore$ $Ai(x)$ es solución de $y''-xy=0$

P3

a) Pdq

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx}_{LHS} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\hat{g}^*(s)\,ds}_{RHS}$$

Partiendo de LHS:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\left(\hat{g}(s)\right)^{\vee}\right]^*(x)\,ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(s)e^{isx}\,ds}_{\text{conjugación}}\Big)^*dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}^*(s)e^{-isx}\,ds\right)dx$$

Fubini

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}^*(s)\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}\,dx}_{=\hat{f}(s)}\Big)ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\hat{g}^*(s)\,ds \;//$$

b) Ahora para obtener la identidad de Parseval basta tomar $g=f$ y aplicar Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\hat{f}^*(s)\,ds$$

$zz^* = |z|^2$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(s)|^2\,ds}$$

P4

Queremos resolver la ec de Schrodinger para una partícula libre. Para ello usaremos TF:

$$(P)=\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx}(x,t)=i\hbar\,\psi_t(x,t) \\ \psi(x,0)=\psi_0(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Aplicamos TF c/r a x:

$$-\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m}\psi_{xx}=i\cancel{\hbar}\,\psi_t$$

$$\mathcal{F}[\,](k)\downarrow$$

$$-\frac{\hbar}{2m}(ik)^2\hat{\psi}=i\,\hat{\psi}_t$$

$$\hat{\psi}'=\frac{\hbar k^2}{2mi}\hat{\psi} \quad /\text{EDO}$$

resolviendola

$$\Rightarrow \hat{\psi}(k,t)=Ae^{\hbar t/2mi\,k^2}$$

Ahora aplicando TF a la CI:

$$\hat{\psi}(k,0)=\hat{\psi}_0(k)$$

$$\Rightarrow \quad A=\hat{\psi}_0(k)$$

Por lo tanto:

$$\hat{\psi}(k,t)=\hat{\psi}_0(k)\,e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2} \quad / \quad \frac{\hbar t}{2mi}=-i\frac{\hbar t}{2m}$$

Y la solución se obtiene aplicando anti TF:

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_0(k)\,e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2}e^{ikx}\,dk$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_0(k)\,e^{i\left(kx-\frac{\hbar t}{2m}k^2\right)}\,dk$$

Ahora bien, si $\psi_0(x)\propto e^{-\pi x^2}$, entonces calculando su TF:

$$\hat{\psi}_0(k)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}e^{-ikx}\,dx$$

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(x^2+\frac{ik}{\pi}x\right)}\,dx$$

completamos cuadrado

$$=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(x^2+\frac{ik}{\pi}x+\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^2-\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^2\right)}\,dx$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(x+\frac{ik}{2\pi}\right)^2 - \frac{k^2}{4\pi}} \, dx$$

$$= \frac{A e^{-k^2/4\pi}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(x+\frac{ik}{2\pi}\right)^2} dx}$$

CV $\sqrt{\pi}\left(x+\frac{ik}{2\pi}\right) = u \Rightarrow \sqrt{\pi}\, dx = du$

$$= \frac{A e^{-k^2/4\pi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du}_{= \cancel{\sqrt{\pi}}}$$

$$\boxed{= \frac{A e^{-k^2/4\pi}}{\sqrt{2\pi}}}$$

Y para que cumpla condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0|^2 dx = A^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x^2} dx}_{\sqrt{2}} = 1 \quad / \; \Psi_0 = A e^{-\pi x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}}$$

Y la solución es:

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4\pi} e^{i\left(kx - \frac{\hbar t}{2m}k^2\right)} dk$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - i\frac{\hbar t}{2m}k^2 - k^2/4\pi} dk$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - \left(\frac{1}{4\pi} + i\frac{\hbar t}{2m}\right)k^2} dk}$$

(La integral se resolvería con residuos pero es algo difícil, no entraría algo así en un control. Bastaría con dejarlo expresado)