Auxiliar 14

Transformada de Fourier y EDP 2.0

Profesor: Ariel Pérez
Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. Resuelva, usando transformada de fourier la ecuación de ondas

$$(P)\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) & \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

P2. Se define la ecuación diferencial de Airy como

$$y''(x) - xy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Pruebe que la función

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(kx + \frac{k^3}{3}\right) dk$$

es una solución de (1). Dicha función se conoce como función de Airy y aparece de forma natural en contextos simples de óptica y mecánica cuántica.

P3. a) Usando la definición de TF (y anti TF) demuestre la identidad de Plancherel (* representa conjugación)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx = \int_{\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{g}^*(s)$$

b) Con lo anterior demuestre la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds$$

P4. Considere la ecuación de Schrödinger para una particula libre con condición inicial

$$(P)\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx}(x,t) = i\hbar\psi_t(x,t) & \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obtenga una solución general de la ecuación utilizando transformada de Fourier.
Considere por último que $\psi_0(x,t) \propto e^{-\pi x^2}$ y que $|\psi^2|$ mide la probabilidad de encontrar a la partícula, lo que implica que la solución debe cumplir la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^2(x)| dx = 1$$

Escriba la solución explicita de $\psi(x,t)$ en este caso.

Resumen

- Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se tiene que su Transformada y Antitransformada de Fourier son respectivamente

$$\mathcal{F}[(g)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx$$
$$\mathcal{F}^{-1}[(g)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(s) e^{isx} ds$$

- Propiedades básicas:
  - Escalamiento
$$\mathcal{F}[f(at)](s) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathcal{F}[f](\frac{s}{a})$$
  - Traslación
$$\mathcal{F}[f(t-a)](s) = e^{-isa} \cdot \mathcal{F}[f](s)$$
  - Traslación en la variable transformada
$$\mathcal{F}[f](s-a) = \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](s)$$
  - Derivada de la transformada
$$\mathcal{F}[f'(t)](s) = (is) \cdot \mathcal{F}[f](s)$$

- Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se define su convolución como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{.\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = (g * f)(x)$$

  y se cumple lo siguiente

$$\mathcal{F}[(f * g)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f](s) \cdot \mathcal{F}[g](s)$$

  Esto se conoce como Teorema de Convolución