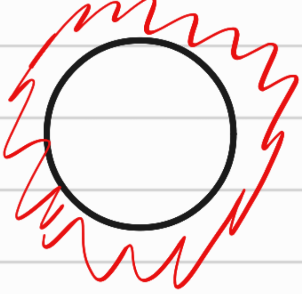
P_1

$\nabla^2 u = 0$
$r \geq 1$
$\theta \in (-\pi, \pi)$



$$(P) = \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r,-\pi) = u(r,\pi) \\ u_\theta(r,-\pi) = u_\theta(r,-\pi) \\ u(1,\theta) = 1 + 3\sin(\theta) - \sin^4(\theta) \quad \theta \in (-\pi,\pi) \end{cases}$$

la región a resolver es el complemento del disco $x^2+y^2<1$
$\Rightarrow r \in [0, \infty]$. Aplicamos separación de variables:

$$u(r,\theta) = R(r)\varphi(\theta)$$

Reemplazando en EDC:

$$R''\varphi + \frac{1}{r}R'\varphi + \frac{1}{r^2}\varphi'' R = 0$$

$\frac{r^2}{R\varphi}$

$$\frac{r^2 R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\varphi''}{\varphi} = 0$$

$$\underbrace{r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R}}_{\text{Sólo depende de } r} = \underbrace{-\frac{\varphi''}{\varphi}}_{\text{Sólo depende de } \theta} = k^2$$

cte de separación (se elige positiva ya que se esperan sols armónicas para el ángulo por las CB)

Resolvamos las EDOS que resultan de agregar la cte de separación:

1) $-\frac{\varphi''}{\varphi} = k^2 \Rightarrow \boxed{\varphi'' + k^2\varphi = 0}$

oscilador armonico, sol conocida

Para cte de sep $= -k^2$ la sol φ es exponencial, no obstante no se pueden satisfacer las CB ya que la exp real no es periodica

$$\varphi(\theta) = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta) \quad k>0 \quad \left(\varphi(\theta) = A\theta + B \text{ si } k=0\right)$$

2) $\frac{r^2 R''}{R} + r\frac{R'}{R} = k^2$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 R'' + rR' - k^2 R = 0}$$

ec diferencial de Euler Cauchy (solución "conocida")

Propongamos solución del tipo $R(r) = r^{\lambda}$ (Ansatz o trucazo), veamos si funciona:

$$r^2 (r^{\lambda})'' + r(r^{\lambda})' - k^2 r^{\lambda} = 0$$

$$\cancel{r^2}\lambda(\lambda-1)\cancel{r^{\lambda-2}} + \cancel{r}\lambda \cancel{r^{\lambda-1}} - k^2 \cancel{r^{\lambda}} = 0$$

$$\boxed{\lambda(\lambda-1) + \lambda - k^2 = 0}$$ ec polinomica para λ

$$\lambda^2 - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm k}$$

Solución general será combinación lineal de las sol propuesta para los λ's encontrados:

$$R(r) = C r^{k} + D r^{-k} \qquad k > 0$$

Ahora para el caso $k=0$, la EDO asociada tiene diferente solución:

$$r^2 R'' + r R' = 0$$

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r}$$

$$\int \frac{dR'}{R'} = -\int \frac{dr}{r} + C$$

$$\ln(R') = -\ln(r) + C$$

$$R' = C e^{\ln(\frac{1}{r})}$$

$$R' = C\frac{1}{r}$$

$$R = C\int \frac{1}{r} dr + D$$

$$R(r) = C\ln(r) + D$$

Teniendo $R(r)$ y $\varphi(\theta)$ imponemos CB para ver la forma de k:

$k>0$

CB1 $\quad u(r,\pi)=u(r,-\pi)$

$$\Rightarrow \cancel{R(r)}\varphi(\pi)=\cancel{R(r)}\varphi(-\pi) \quad \forall r\in[1,\infty)$$

$$A\cos(k\pi)+B\sin(k\pi)=A\underbrace{\cos(-k\pi)}_{\substack{=\cos(k\pi)\\ \text{ya que es par}}}+B\underbrace{\sin(-k\pi)}_{\substack{=-\sin(k\pi)\\ \text{ya que es impar}}}$$

$$\cancel{A\cos(k\pi)}+B\sin(k\pi)=\cancel{A\cos(k\pi)}-B\sin(-k\pi)$$

$$2B\sin(k\pi)=0$$

$$\boxed{\Rightarrow B=0 \ \vee \ \sin(k\pi)=0}$$

Veamos CB para la derivada para no ponernos en casos al tiro:

$k>0$ $\quad$ CB2 $\quad u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)$

$$\varphi'(\pi)=\varphi'(-\pi)$$

$$-Ak\sin(k\pi)+\cancel{Bk\cos(k\pi)}=Ak\sin(k\pi)+\cancel{Bk\cos(k\pi)}$$

$$2kA\sin(k\pi)=0$$

$$\boxed{A=0 \ \vee \ \sin(k\pi)=0}$$

Como A y B son indep, necesariamente:

$$\sin(k\pi)=0$$

$$k\cancel{\pi}=n\cancel{\pi} \qquad n\geq 1$$

$$\boxed{k=n}$$

Para $k=n=0$:

$$\varphi(\theta)=A\theta+B$$

CB1 $\quad \varphi(\pi)=A\pi+\cancel{B}=-A\pi+\cancel{B}=\varphi(-\pi)$

$$\Rightarrow \boxed{A=0}$$

CB2 $\quad \varphi'(\pi)=0=0=\varphi'(-\pi)$

$\Rightarrow \varphi(\theta)=cte$, $k=0$

Este caso se puede recoger permitiendo $n\geq 0$ en:

$$\boxed{\varphi(\theta)=A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)} \quad n\geq 0$$

Por lo tanto la solución general es (redefiniendo ctes de EDOS):

$$u(r,\theta)=\underbrace{\tilde{A}\ln(r)+\tilde{B}}_{\text{para } n=0}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)\left(\frac{1}{r}\right)^n}_{\text{para } n\geq 1}$$

Sólo faltan por determinar las ctes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{a}_n$ y $\tilde{b}_n$. Esto lo haremos con la CB que falta:

$$u(1,\theta)=\overbrace{1+3\sin(\theta)-\sin^4(\theta)}^{f(\theta)}$$

Reescribamos $\sin^4(\theta)$ (para ocupar ortogonalidad e igualdad termino a termino).

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta)&=(\sin^2\theta)^2\\&=\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2\\&=\frac{1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4}\\&=\frac{1-2\cos(2\theta)+\frac{1+\cos(4\theta)}{2}}{4}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\end{aligned}$$

Ahora si:

$$f(\theta)=u(1,\theta)=\cancelto{0}{\tilde{A}\ln(1)}+\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)\cancelto{1}{\left(\frac{1}{1}\right)^n}$$

$$f(\theta)=\underbrace{\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)}_{\text{serie de Fourier de } f(\theta)}$$

Expandiendo $f(\theta)$ e igualando termino a termino (se puede hacer por ortogonalidad de fns $\{\sin(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\cos(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$1+3\sin(\theta)-\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right)=\tilde{B}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_n\cos(n\theta)+\tilde{b}_n\sin(n\theta)\right)$$

$$\frac{5}{8}+3\sin(\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)-\frac{1}{8}\cos(4\theta)=\tilde{B}+b_1\sin(\theta)+a_2\cos(2\theta)+a_4\cos(4\theta)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{B} &= 5/8\\ \tilde{b}_1 &= 3\\ \hat{a}_2 &= 1/2\\ \tilde{a}_4 &= -1/8\end{aligned}}$$

todo el resto son 0

Quedando una sol general igual a:

$$u(r,\theta) = C\ln(r) + \frac{5}{8} + 3\sin(\theta)r^{-1} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)r^{-2} - \frac{1}{8}\cos(4\theta)r^{-4}$$

A esto en electro se le llama expansión multipolar

P2

Se pide resolver

$$(P)\begin{cases} u_t + u - \cos(t)u_{xx} = 0 & x\in(0,1), t>0\\ u(0,t) + u(1,t) = 0 & \\ u_x(0,t) = 0 & \\ u(x,0) = h(x) & \end{cases}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x\leq 1/2\\ \pi/2 & 1/2 < x\leq 1\end{cases}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{1}{\cos(t)XT}\left(T'X + TX - \cos(t)X''T = 0 \right)$$

$$\frac{T'}{\cos t\, T} + \frac{1}{\cos t} - \frac{X''}{X} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\cos t}\left(\frac{T'}{T} + 1\right)}_{\text{sólo depende de } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{sólo depende de } x} \overset{!}{=} -k^2$$

cte de separación

Resolviendo las EDO's asociadas:

$k>0$)

$$\frac{X''}{X}=-k^2 \Rightarrow \boxed{X''+k^2X=0}$$

oscilador armonico

$$X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

Si $k=0$)

$$X''=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B$$

No obstante aplicando CB altiro

- $X'(0)=0$ — $A=0$)
- $X(0)+X(1)=0$ — $B+B=0 \Rightarrow B=0$)

El caso $k=0$ lleva a la sol trivial por lo tanto no se toma en cuenta (haciendo esto me salto el considerar $k=0$ para la otra EDO). Resolviendo para T:

$$\frac{1}{\cos t}\left(\frac{T'}{T}+1\right)=-k^2$$

$$\frac{T'}{T}=-k^2\cos t-1$$

$$\int dt\left(\frac{dT}{dt}\frac{1}{T}=-k^2\cos t-1\right.$$

$$\int\frac{dT}{T}=-k^2\int\cos t\,dt-\int dt+C$$

$$\ln(T)=-k^2\sin t-t+C$$

$$\Rightarrow T(t)=Ce^{-k^2\sin t-t} \quad k>0$$

Impongamos CB:

CB1 $u_x(0,t)=0$

$$X'(0)\cancel{T(t)}=0$$

$$-Ak\underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{0}+Bk\cos(0)=0$$

$$\Rightarrow B=0$$

$$\Rightarrow X(x) = A\cos(kx)$$

CB2 $$X(0) + X(1) = 0$$

$$\cancel{A}\underbrace{\cos(0)}_{1} + \cancel{A}\cos(k) = 0$$

$$\cos(k) = -1$$

$$\Rightarrow k = 2n\pi - \pi$$

$$\boxed{k = \pi(2n-1)} \quad n \geq 1$$

Juntando sols:

$$X(x)T(t) = Ce^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t - t}\cos(\pi(2n-1)x), \quad n \geq 1$$

Aplicando ppio de superposición

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t - t}\cos(\pi(2n-1)x)}$$

Falta por aplicar CI $u(x,0) = h(x)$:

$$h(x) = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{e^{\cancel{-\pi^2(2n-1)^2\sin(0) - 0}}}_{1}\cos(\pi(2n-1)x)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\pi(2n-1)x)}$$

"especie" de serie de cosenos de $h(x)$

Multiplicando por $\cos(k\pi x)$ e integrando (además $2n-1 = n'$):

$$\int_0^1 h(x)\cos(k\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_0^1 \cos(n'\pi x)\cos(k\pi x)\,dx}_{= \frac{1}{2}\delta_{n'}^{k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n' = k \\ 0 & n' \neq k \end{cases}}$$

Como $k = n'$ únicos términos no nulos de serie, despejando $C_{n'}$

$$\boxed{C_{n'} = 2\int_0^1 h(x)\cos(n'\pi x)\,dx}$$

notamos que se calculan de la misma forma que la extensión par de $h(x)$

Reemplazando explícitamente $h(x)$:

$$c_{n'} = 2\left[\int_0^{1/2} \cancel{h(x)}\cos(n'\pi x) + \int_{1/2}^{1} h(x)\cos(n'\pi x)\right]$$

$$= \cancel{2}\,\frac{\pi}{\cancel{2}}\int_{1/2}^{1}\cos(n'\pi x)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{\pi}}{n'\cancel{\pi}}\sin(n'\pi x)\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{n'}\left(\cancel{\sin(n'\pi)} - \underbrace{\sin\left(n'\frac{\pi}{2}\right)}_{}\right) \quad n' = 2n-1$$

$$-\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cancel{\sin(n\pi)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\underbrace{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}}$$

Por lo tanto la sol final es:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-\pi^2(2n-1)^2\sin t - t}\cos(\pi(2n-1)x)}$$

P3

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} & x\in(0,1),\ t>0 \\ u_x(0,t) = 0 & t>0 \\ u_x(1,t) = 2 & \\ u(x,0) = x^2+1 & x\in(0,1) \end{cases}$$

Considerando el cv

$$u(x,t) = ax^2 + bt + \omega(x,t)$$

Si $a=1$ y $b=2$ (esto parece trucazo pero se hace con prueba y error en las CB y para que efectivamente sea sol), reemplazando todo el corcho de $u(x,t)$ en $(*)$:

$$u_t = u_{xx}$$

$$\cancel{b} + \omega_t = \cancel{2a} + \omega_{xx} \quad \text{/en esta línea está la razón de pq escogí } b=2 \text{ y } a=1$$

$$\omega_t = \omega_{xx}$$

También con las CB:

CB1 $\quad u_x(0,t)=0$

$\Rightarrow \quad 2\cdot 0+\boxed{w_x(0,t)=0}$

CB2 $\quad u_x(1,t)=2$

$\cancel{2}\cancel{1}+w_x(1,t)=\cancel{2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{w_x(1,t)=0}$

CI $\quad u(x,0)=0$

$\Rightarrow \quad \cancel{x^2}+w(x,0)=\cancel{x^2}+1$

En efecto $u(x,t)=x^2+2t+w(x,t)$ se transforma en

$$\star\begin{cases} w_t=w_{xx} \\ w_x(0,t)=w_x(1,t)=0 \\ w(x,0)=1 \end{cases}$$

Resolviendo $\star$ con se de variables $w(x,t)=X(x)T(t)$

$$\frac{1}{XT}\left(\begin{array}{l} T'X=X''T \\ \dfrac{T'}{T}=\dfrac{X''}{X}=-k^2 \end{array}\right.$$ cte de separación

(Acá voy a ir más rápido pq es más de lo mismo):

$k>0$ 1) $X''+k^2X=0$

$\Rightarrow X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$

$k=0$ $\quad X''=0$

$\Rightarrow X(x)=Ax+B$ (de las CB se puede sacar que $A=0$ por lo que $X(x)=cte$ y se puede incluir en la sol para $k>0$ por el coseno)

2) $\int \left(\dfrac{T'}{T}=-k^2 \right.$

$\ln(T)=-k^2\int dt+C$

$\Rightarrow \boxed{T=Ce^{-k^2t}}$

Aplicamos CB

$$X'(0) = -\cancel{Ak\sin(0)} + Bk\cancel{\cos(0)} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$X'(1) = -\cancel{Ak}\sin(k) = 0$$

$$\Rightarrow k = n\pi$$

$$X(x) = A\cos(n\pi x), n \geq 0$$

Juntando en serie:

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}}$$

Imponiendo CI:

$$w(x,0) = 1 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x)}_{\text{serie de cosenos de } 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \int_0^1 dx = 1}$$

$$\Rightarrow a_n = 2\int_0^1 \cos(n\pi x) = \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1$$

$$= 0$$

Sigue que $w(x,t) = 1$. Por lo tanto la sol general es:

$$\boxed{u(x,t) = x^2 + 2t + 1}$$