$\boxed{P_1}$

$$f(x)=x^2,\quad -\pi\leq x\leq\pi$$

Notamos que f es par por lo que su serie de Fourier es:

$$S_f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

Donde los coefs cumplen:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \qquad n\in\{0,1,2,\dots\}$$

f(x) par

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

$\boxed{n=0}$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\boxed{\frac{\pi^2}{3}}$$

$\boxed{n\neq 0}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx}_{\text{IPP (int. por partes)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x^2 \Longrightarrow du=2x\,dx \\ dv=\cos(nx)dx \Longrightarrow v=\frac{1}{n}\sin(nx)\end{array}}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{x^2}{n}\sin(nx)}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}x\sin(nx)}_{\text{IPP de nuevo}}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sin(nx) \Longrightarrow v=-\frac{1}{n}\cos(nx)\end{array}}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2x}{n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\left(\frac{-1}{n}\right)\int_0^{\pi}\cos(nx)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}-\frac{2}{n^2}\frac{1}{n}\cancelto{0}{\sin(n\pi)}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{n^2}(-1)^n = \boxed{\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

Por lo que la serie es:

$$\boxed{S_f = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)}$$

Y dado que x^2 es continua y L^2 se tiene que:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \quad *$$

b) Evaluando para $x = \pi$ $*$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\underbrace{(-1)^n \overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}_{1}$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\cancel{4}\,2} \frac{\cancel{2}\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}}$$

P2

$$(EDC) \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+F(x) \qquad \forall t\geq 0,\ x\in(0,\pi)$$
$$(CB) \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0 \qquad \forall t\geq 0$$
$$(CI) \quad u(x,0)=g(x)$$

con $F(x)=\sin(x)+3\sin(4x)-\sin(5x)$ y $g(x)=-\sin(2x)+\sin(4x)$

a) Una solución $u_p(x,t)$ que es cte en el tiempo satisface $\frac{\partial u_p}{\partial t}=0$, y además por ser cte no depende explicitamente del tiempo $(u_p(x))$. Reemplazando en EDC:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial u_p}{\partial t}}}_{0}=\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_p(x)+F(x)$$

$$\int dx \quad u_p''=-\frac{F(x)}{\alpha}$$

$$u_p'=-\frac{1}{\alpha}\int F(x)\,dx+A$$

$$u_p'=-\frac{1}{\alpha}\int(\sin(x)+3\sin(4x)-\sin(5x))\,dx+A$$

$$\int dx \quad u_p'=\frac{1}{\alpha}\left(\cos(x)+\frac{3}{4}\cos(4x)-\frac{\cos(5x)}{5}\right)+A$$

$$\boxed{u(x)=\frac{1}{\alpha}\left(\sin(x)+\frac{3}{16}\sin(4x)-\frac{\sin(5x)}{25}\right)+Ax+B}$$

Veamos (CB):

$$u_p(0,t)=\frac{1}{\alpha}\left(\underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{3}{16}\sin(0)}}_{0}-\underbrace{\cancel{\frac{\sin(0)}{25}}}_{0}\right)+\underbrace{\cancel{A\,0}}_{0}+B=0$$

$$\boxed{\Rightarrow B=0}$$

$$u_p(0,t)=\frac{1}{\alpha}\left(\underbrace{\cancel{\sin(\pi)}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{3}{16}(4\pi)}}_{0}-\underbrace{\cancel{\frac{\sin(5\pi)}{25}}}_{0}\right)+A\pi=0$$

$$\boxed{\Rightarrow A=0}$$

$$\therefore\ u_p(x)=\frac{\sin(x)}{\alpha}+\frac{3\sin(4x)}{16}-\frac{\sin(5x)}{25}$$

b) Usando el sgte cambio de variable $u = v + u_p$ y reemplazando en (EDC):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_p}{\partial t}}}_{0} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha \underbrace{\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}}_{= \cancel{-F(x)}} + \cancel{F(x)}$$

por EDC para u_p

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

ec del calor

La solución para la ecuación del calor con condiciones de borde tipo Dirichlet ($v(0,t) = v(\pi,t) = 0$) es conocida:

* CB para u y v son iguales ya que $u_p(0,t) = u_p(\pi,t) = 0$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\cancel{\pi} x}{\cancel{\pi}}\right) e^{-\alpha\left(\frac{k\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\right)^2 t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) e^{-\alpha k^2 t}$$

No obstante falta por calcular los coefs A_k. Esto lo haremos aplicando la CI, que aún no utilizamos. Evaluando:

$$g(x) = u(x,0) = v(x,0) + u_p(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(x) - u_p(x)}_{h(x)} = v(x,0)$$

$$\underbrace{h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)}_{\text{Serie de senos de } h(x)} \underbrace{\cancel{e^{-\alpha k^2 0}}}_{1}$$

En el caso más general, los coefs de una serie de senos se calculan como:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(kx)\, dx$$

Reemplazando con $h(x) = \sin(2x) + \sin(4x) - u_p(x)$ e integrando es posible llegar al resultado, no obstante ese camino es algo engorroso. Una forma más fácil de ver los coefs (que en este caso son finitos) es igualar término a término la serie con la función, pues ambas están compuestas de senos de diferentes frecuencias:

$$-\frac{\sin(x)}{\alpha}-\sin(2x)+\left(1-\frac{3}{16\alpha}\right)\sin(4x)+\frac{\sin(5x)}{25x}=A_1\sin(x)+A_2\sin(x)+A_4\sin(4x)$$
$$+A_5\sin(5x)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow A_1=-\frac{1}{\alpha}\\&\Rightarrow A_2=-1\\&\Rightarrow A_4=1-\frac{3}{16\alpha}\\&\Rightarrow A_5=\frac{1}{25\alpha}\end{aligned}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}v(x,t)=&-\frac{1}{\alpha}\sin(x)e^{-\alpha t}+\sin(2x)e^{-4\alpha t}+\left(1-\frac{3}{16\alpha}\right)\sin(4x)e^{-16\alpha t}\\&+\frac{1}{25}\sin(5x)e^{-25\alpha t}\end{aligned}}$$

c) Recordamos que $u(x,t)=v(x,t)+u_p(x)$. Reemplazando con lo obtenido:

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{\alpha}\sin(x)\left(1-e^{-\alpha t}\right)+\sin(2x)e^{-4\alpha t}+\sin(4x)\left(\left(\frac{3}{16\alpha}-1\right)e^{-\alpha t}+\frac{3}{16\alpha}\right)\\&+\frac{1}{25\alpha}\sin(5x)\left(e^{-25\alpha t}-1\right)\end{aligned}}$$

P_3

a) La EDP a resolver es:

$$\begin{array}{ll}\text{EDC} & \nabla^2 V=0\\ \text{C.B (1)} & V(x,0)=V(x,a)=0\\ \text{C.B (2)} & V(0,y)=V_0(y)\\ \text{C.B (3)} & V(x\to\infty,y)=0\end{array}$$

Utilizando separación de variables en EDC $V(x,y)=X(x)Y(y)$:

$$(\partial_{xx}+\partial_{yy})X(x)Y(y)=0$$
$$Y(y)X''(x)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\frac{X''(x)}{X}+\frac{Y''(y)}{Y}=0$$

Lo que sólo es posible si $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=cte$. La elección de la naturaleza de esta cte ($\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^-,\mathbb{C}$, etc) dependerá de las C.B y que tenga sentido físico la solución. Sea $cte=k$:

$$-\frac{Y''}{Y}=k \Rightarrow \underbrace{Y''+kY=0}_{\text{polinomio característico}}$$ EDO 2do orden

$$\lambda^2+k=0$$

$$\lambda^2=-k \Rightarrow \lambda_1=\sqrt{-k} \wedge \lambda_2=-\sqrt{-k}$$

Por lo que la solución es:

$$Y(y)=Ae^{\sqrt{-k}y}+Be^{-\sqrt{-k}y}$$

No obstante no hemos dicho nada sobre la naturaleza de k ya que bien podría ser negativa y la sol cambia a ser oscilatoria. Para elegir un signo para k (y comportamiento de la solución) vemos C.B:

$$Y(0)=0=A+B \Rightarrow A=-B$$

$$Y(a)=0=Ae^{\sqrt{-k}a}+Be^{-\sqrt{-k}a}$$

$$=A\left(e^{\sqrt{-k}a}-e^{-\sqrt{-k}a}\right)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{A=0}_{\substack{\text{lleva a } Y(y)=0\\ \text{sol trivial,}\\ \text{se descarta}}} \vee \underbrace{e^{\sqrt{-k}a}-e^{-\sqrt{-k}a}=0}_{\substack{\text{solo posible para}\\ k>0 \text{ tq}}}$$

$$e^{i\sqrt{k}a}-e^{-i\sqrt{k}a}=0$$

$$\frac{1}{2i}\Big\downarrow$$

$$\sin(\sqrt{k}a)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{k}a=n\pi$$

$$k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad n\in\mathbb{N}$$

Como $k>0$, $Y(y)$ en los reales se escribe como:

$$Y(y)=A\cos(\sqrt{k}y)+B\sin(\sqrt{k}y)$$

$$\overset{CB}{\Longrightarrow} Y(0)=A\cos(0)+\cancel{B\sin(0)}^{0}=0 \Rightarrow A=0$$

$$Y(a)=B\sin(\sqrt{k}a)=0 \Rightarrow \text{se recupera } k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Sigue la sol y es:

$$Y(y)=B\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Ahora la EDO para X:

$$\frac{X''}{X} = k \Rightarrow X'' - kX = 0$$
$$\Rightarrow X(x) = Ce^{\sqrt{k}x} + De^{-\sqrt{k}x}$$

Imponiendo C.B:

$$X(x\to\infty) = \underbrace{Ce^{\infty}}_{\text{diverge}} + D\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} = 0$$

$\Rightarrow C = 0$

Y la sol para X queda:

de antes

$$X(x) = De^{-\sqrt{k}x} = \boxed{De^{-\frac{n\pi}{a}x}}$$

Juntando $V(x,y) = X(x)Y(y)$:

$$\boxed{V(x,y) = Ae^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad n \in \mathbb{N}$$

Por ppio de superposición:

$$\boxed{V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

b) Nos falta una C.B por aplicar:

$$V(0,y) = V_0(y) \equiv V_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}_{\text{Serie de senos de } V_0}$$

Por tanto los coefs A_n se calculan como:

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy$$

$$= \frac{2V_0}{a}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy$$

$$= \frac{2V_0}{\cancel{a}}\left(-\frac{\cancel{a}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(\cos(0) - \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{a}}\cancel{a}\right)}_{(-1)^n}\right)$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Sigue que la sol general se escribe como:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n\,impar}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

c) Utilizando indicación

$$\sum_{n\,impar}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a}x\right)}\right)$$

Por lo que el potencial se escribe como:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a}x\right)}\right)}$$