

Auxiliar 10

Series de Fourier y EDP

Profesor: Ariel Pérez

Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [Problema de Basilea]

a) Considere la función periódica de periodo 2π , definida por

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Encuentre la serie de Fourier de la función f .

b) Usando la serie de Fourier obtenida anteriormente pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

P2. [Ecuación del calor no homogénea]

Considere la siguiente EDP con condiciones de borde e inicial dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + F(x) & \forall t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Con $g(x) = -\sin(2x) + \sin(4x)$ y $F(x) = \sin(x) + 3\sin(4x) - \sin(5x)$.

- Considere una solución constante en el tiempo u_p . Encuentre u_p tal que sea solución a la ecuación diferencial asociada y cumpla las condiciones de borde.
- Se define $u(x, t) = v(x, t) + u_p(x)$. Vea cuál es la ecuación resultante para v y resuélvala (la vieron en clases exhaustivamente).
- Obtenga la solución general para $u(x, t)$.

P3. [Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas]

Dos placas metálicas, conectadas a tierra ($V = 0$) y paralelas al plano xy , una en $y = 0$ y otra a una distancia $y = a$. El sistema está cerrado de tal modo que se aplica un potencial $V_0(y)$ entre placas.

- Proponga una solución para el potencial electrostático $V(x, y)$ entre placas, utilizando separación de variables. Considere que se cumple la ecuación de Laplace y las condiciones

de borde planteadas:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ V(x, a) = V(x, 0) = 0 & x \in [0, \infty) \\ V(0, y) = V_0 & y \in [0, a] \\ V(x \rightarrow \infty, y) = 0 & y \in [0, a] \end{cases} \quad (1)$$

- b) Considere $V(0, y) = V_0$. A partir de esto encuentre los coeficientes asociados a la solución reconociendo que en $x = 0$ V_0 se escribe como una expansión en serie de Fourier.
- c) Escriba el potencial como un solo termino. [INDICACIÓN]: se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{n \in \{1, 3, 5, \dots\}}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right)$$

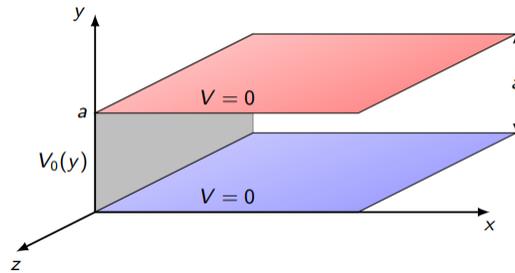


Figura 1: Configuración similar a capacitor, dos placas de metal paralelas al plano xz , una en $y = 0$ y otra en $y = a$. En $x = 0$ las placas están conectadas y cerradas con una tira infinita y aislada de las dos placas la cual mantiene un potencial específico $V_0(y)$.