

P₁

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

a) Pdg f es holomorfa en $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Primero notamos que:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Introduciendo el 1 en la sumatoria y considerando que $\binom{\alpha}{0} = 1$, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

= Cn coefs de la serie de potencias

Se sabe que toda función que se expresa como serie de potencias es holomorfa en el radio de convergencia dado por:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!n!} \cdot \frac{(\alpha-n-1)!(n+1)!}{\alpha!} \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\alpha-n} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Pdg $f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}$, $z \in D$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!(n-1)!} z^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k=n-1 \quad \left(\right. &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!(n-1)!} z^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-k-1)! k!} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha-k) \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! k!} z^k \\
f'(z) &= \underbrace{\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k}_{= f(z)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} z^k}_{\text{parecido a } f'(z)} \quad (\star)
\end{aligned}$$

En efecto:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^k$$

no hace nada
añadir el primer termino

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k z^k = z f'(z)$$

Reemplazando en $\star$:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \alpha f(z) - z f'(z) \\
\Rightarrow f'(z) &= \alpha \frac{f(z)}{1+z}
\end{aligned}$$

c) Pdg que la derivada de $(1+z)^{-\alpha} f(z)$ es 0.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left((1+z)^{-\alpha} f(z) \right) &= \frac{-\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} f(z) + f'(z) (1+z)^{-\alpha} \\
&= \cancel{\frac{-\alpha}{(1+z)^{\alpha+1}} f(z)} + \cancel{\frac{\alpha f(z)}{(1+z)^{\alpha+1}}} \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z} \end{array} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

d) El item anterior implica que

$$\begin{aligned}
(1+z)^{-\alpha} f(z) &= \text{cte} = C \\
\Rightarrow f(z) &= C(1+z)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Y de $f'(z) = \frac{d}{dz} (C(1+z)^{\alpha}) = \alpha \frac{f(z)}{1+z}$ es fácil verificar que $C=1$, concluyendo el resultado.

P₂

Determine la expansión de $f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$ en potencias de $z-1$. Como el pto de prueba es 1, definimos $w = z-1$.
 $\Rightarrow z = w+1$. Reemplazando

$$\begin{aligned}\frac{2z+3}{z+1} &= \frac{2(w+1)+3}{w+2} \\ &= \frac{2w+5}{2+w} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2w+5)}{1 - \left(-\frac{w}{2}\right)}\end{aligned}$$

Recordamos serie geometrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{w}{2}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^n\end{aligned}$$

radio de convergencia
 $\left|\frac{w}{2}\right| < 1$
 $|z-1| < 2$

Multiplicando por $2w+5$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{(2w+5)}{1 - \left(-\frac{w}{2}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} 2w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} w^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \\ &\quad \text{K=n+1 luego k=n índices mudos} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} w^n + \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} w^n \\ &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{5(-1)^n}{2^{n+1}} \right) w^n \\ &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} + 5(-1)^n}{2^n} w^n \\ &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{5}{2} - 2 \right) w^n = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} w^n\end{aligned}$$

Como $w = z-1$:

$$\frac{2z+3}{1+z} = \frac{5}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

P3

Utilizamos el cv usual $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta$

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \int_{|z|=1} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)^{2n} \frac{1}{z} dz$$

esto está implícito cuando hacemos cv $z = e^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2^n i} \int_{|z|=1} (z + z^{-1})^{2n} z^{-1} dz$$

Utilizando teo del Binomio para expandir $(z + z^{-1})^{2n}$:

$$(z + z^{-1})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-k} (z^{-1})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k}$$

Por tanto:

se puede intercambiar z por $\int$

$$I = \frac{1}{i 2^n} \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1} dz$$

$$= \frac{1}{i 2^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} z^{2n-2k-1} dz$$

$$= \frac{1}{i 2^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n}}{z^{2k+1}} dz$$

$2n=2k$

$f(z)$ analítica excepto
Si $f(z) = \frac{1}{z}$, vale decir sólo
para $k=n$ la integral aporta
(Cauchy Goursat)

Por tanto único término de la sumatoria que aporta es $k=n$ (para $k \neq n$ la función toma la forma de $\frac{1}{z^m}$ no obstante $\text{Res}\left(\frac{1}{z^m}, 0\right) = 0$).

Reemplazando $k=n$:

$$I = \frac{1}{2^n i} \binom{2n}{n} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$$

$2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right)$

$$= 2^{1-2n} \binom{2n}{n} \pi$$

P₄

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{3z^4 - 10z^3 + 3z^2}$$

a) Para los polos vemos donde el denominador es igual a 0.

$$3z^4 - 10z^3 + 3z^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$3z^2(3z^2 - 10z + 3) = 0$$

$$\text{raíces } z_{1,2} = \frac{10}{6} \pm \frac{\sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10}{6} \pm \frac{8}{6}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{3} \quad z_2 = 3$$

$$\Rightarrow 3z^2(z - \frac{1}{3})(z - 3) = 0$$

$\Rightarrow z_0 = 0, z_1 = \frac{1}{3}$ y $z_2 = 3$ polos de f . Veamos sus ordenes analizando

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0 \text{ e } \infty$$

$z=0$ | Por intuición probemos con orden 2. Comprobemos viendo el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \cancel{z^2} z^4 + 1}{3 \cancel{z^2} (z - \frac{1}{3})(z - 3) - \frac{1}{3} \cdot 3} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \text{ e } \infty$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ polo orden 2

$z = \frac{1}{3}$ | $n=1$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{(z - \frac{1}{3}) \cancel{z^2} z^4 + 1}{3 \cancel{z^2} (z - \frac{1}{3})(z - 3) - \frac{1}{3} \cdot 3} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{z^4 + 1}{3z^2(z - 3)} = \frac{\frac{1}{81} + 1}{\frac{1}{9}(\frac{1}{3} - 3)3}$$

$$= \frac{\frac{82}{81}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1-9}{3} \cdot \frac{8}{3}}$$

$$= \frac{\frac{82}{81} \cdot 27}{3 \cdot \frac{81}{3} \cdot \frac{8}{4}} = \frac{41}{36} \neq 0$$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{3}$ polo orden 1

$z_2 = 3$ | $n=1$

$$\lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z - 3) \cancel{z^2} z^4 + 1}{3 \cancel{z^2} (z - 3)(z - \frac{1}{3})} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z^4 + 1}{3z^2(z - \frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{81} + 1}{3 \cdot \frac{1}{9}(3 - \frac{1}{3})} = \frac{\frac{82}{81} \cdot 27}{3 \cdot \frac{81}{3} \cdot \frac{8}{4}} = \frac{41}{36} \neq 0$$

$$\Rightarrow z_2 = 3 \text{ polo orden } 1.$$

Los residuos de z_1 y z_2 coinciden con los límites calculados para ver sus órdenes y a que:

$$\underline{n=1} \mid \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Por tanto:

$$\underline{\text{Res}(f, z_1 = \frac{1}{3}) = -\frac{41}{36}} \quad \text{y} \quad \underline{\text{Res}(f, z_2 = 3) = \frac{41}{36}}$$

Sólo queda calcular el de $z_0 = 0$. Utilizando fórmula de residuo:

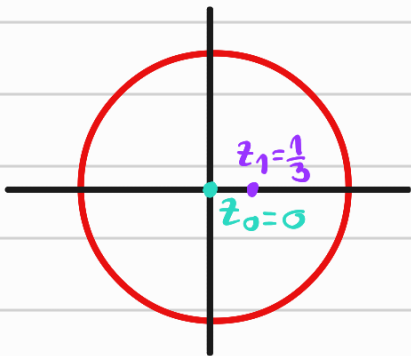
$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left(\frac{z^4+1}{3z^2(z-\frac{1}{3})(z-3)} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^4+1}{\underbrace{3(z-\frac{1}{3})(z-3)}_{3z^2-10z+3}} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4z^3(3z^2-10z+3) - (z^4+1)(6z-10)}{(3z^2-10z+3)^2}$$

$$= \boxed{\frac{10}{9}}$$

b) a) $\int_{|z|=1} f(z) dz$. $|z|=1$ circunferencia unitaria

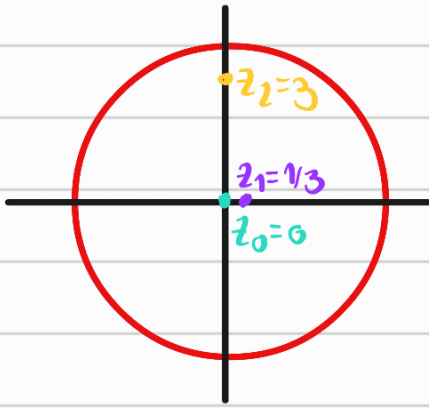


Se encierran 2 polos. f holomorfa en $|z|=1$, en virtud de l teo de los residuos:

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \left(\underbrace{\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, \frac{1}{3})}_{\text{residuos polos encerrados}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{10}{9} - \frac{41}{36} \right) = \underline{\underline{-\frac{\pi i}{18}}}$$

b) $\oint_{|z|=4} f(z) dz$. $|z|=4$ circunferencia radio 4



Se encierran los 3 polos. f holomorfa en $|z|=4$ en virtud del teo de los residuos:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=4} f(z) dz &= 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1/3) + \text{Res}(f, 3) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{10}{9} - \cancel{\frac{47}{36}} + \cancel{\frac{47}{36}} \right) \\ &= \frac{20\pi}{9} i\end{aligned}$$