Auxiliar 8

Preparación C2

Profesor: Ariel Pérez
Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

Resumen

[Teorema de Cauchy-Goursat]
Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω abierto simplemente conexo, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

$\forall \Gamma \subseteq \Omega$ curva cerrada, simple y regular.
[Polos y residuos] Se cumple que

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z))$$

con z_0 polo de orden k.

[Formula integral de Cauchy]
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y D disco cerrado definido por $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ completamente contenido en Ω. Sea también $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces para cualquier z_0 en el interior de D

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

[Teorema de los residuos]
Sea f función holomorfa en Ω abierto, y sea P el conjunto de sus polos. Sea Γ camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$, entonces

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$

P1. Considere

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)}{n!} z^n$$

a) Pruebe que f es holomorfa en $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

b) Pruebe que

$$f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}, \quad z \in D$$

c) Pruebe que la derivada de $(1+z)^{-\alpha} f(z)$ es 0.

d) Concluya que $f(z) = (1+z)^\alpha$

P2. Determine la expansión de

$$\frac{2z+3}{z+1}$$

en potencias de $(z-1)$. Calcule el radio de convergencia.

P3. Calcule:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)d\theta$$

[INDICACIÓN]: Puede ser útil recordar el teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$$

P4. Considere la función $f(z) = \frac{z^4+1}{3z^4-10z^3+3z^2}$. Calcule el valor de la integral en los siguientes casos:

a)

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

b)

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz$$