

Auxiliar 5

Variable compleja

Profesor: Ariel Pérez

Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [Intro a complejos]

- a) Resuelva la ecuación $e^z = \cos(iz)$.
- b) Compruebe que la forma de extender el logaritmo como función inversa de e^z en los complejos está dado por

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

con $|z|$ el modulo de z y $\arg(z)$ su argumento (ángulo respecto al eje real). Comente respecto a posibles problemas en la definición de esta función.

- c) Usando el hecho de que en los reales

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

halle el valor de $(-1)^\alpha$ en los complejos.

P2. [Polos]

Identifique los polos (singularidades) de las siguientes funciones complejas:

- a) $\tan(z)$
- b) $\frac{z^2}{1+z^4}$
- c) $\frac{1}{1+z+z^2}$
- d) $e^{1/z}$

P3. [Integrales de Fresnel]

Deduzca las integrales de Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Hint: Considere la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz$ con el cambio de variable $u = \frac{\sqrt{2}}{1-i}z$.

P1 [Intro a $\mathbb{C}$]

a) Se pide resolver en $\mathbb{C}$ la sgte ecuación:

$$\underline{e^z = \cos(iz)}$$

De la formula de euler es posible demostrar que:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ya que si $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, entonces:

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + \cancel{i\sin\theta} + \cos(\theta) - \cancel{i\sin\theta}}{2} = \frac{2\cos\theta}{2}$$

Ocupando esto en la ec a resolver:

$$\cos(iz) = \frac{e^{-iz} + e^{+iz}}{2} = e^{iz}$$

$$\Rightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = e^z$$

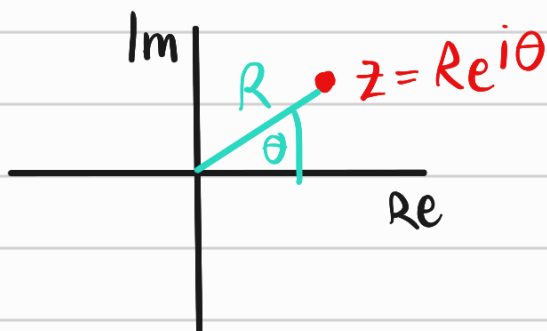
$$e^z + e^{-z} = 2e^z$$

$$\frac{1}{e^z} = e^z$$

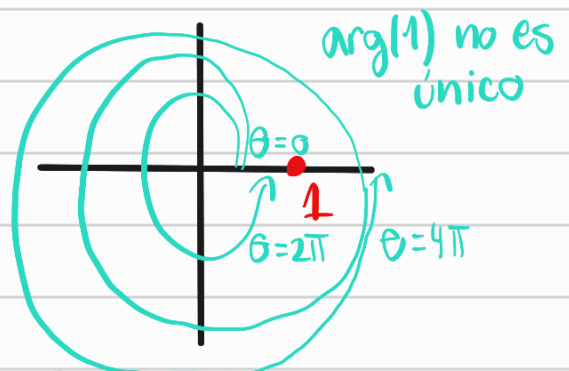
$$\Rightarrow \boxed{e^{2z} = 1} (*)$$

Llegado a este punto parece más o menos claro que $z=0$ es solución a la ecuación, pero ¿es la única solución? Para verlo recordemos la forma polar de representar números complejos:

$$z = |z|e^{i\arg(z)} = Re^{i\theta} \quad / |z| = R \quad \arg(z) = \theta$$



$$z=1 \Rightarrow$$



$$\therefore 1 = e^{i2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando esto en (*):

$$\ln \left(\begin{array}{l} e^{zz} = e^{i2k\pi} \\ z = 2k\pi i \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_k = k\pi i} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Soluciones de la ecuación

$$e^z = \cos(iz)$$

b) Para extender el logaritmo a los complejos queremos mantener sus buenas propiedades, en particular ser función inversa de e^z ya bien definida. Para ello ocupamos fórmula de Euler $z = Re^{i\theta}$:

$$\log(z) = \log(Re^{i\theta})$$

$$= \log(R) + \log(e^{i\theta})$$

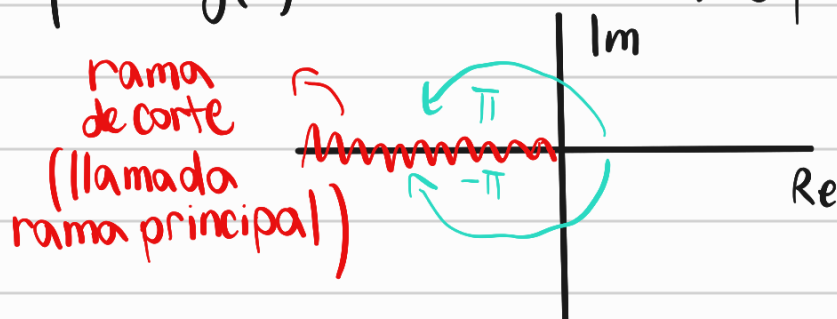
$R \in \mathbb{R}$ por lo que definimos esto simplemente como $\ln(R)$

$\log(e^z) = z$ por def de fn inversa

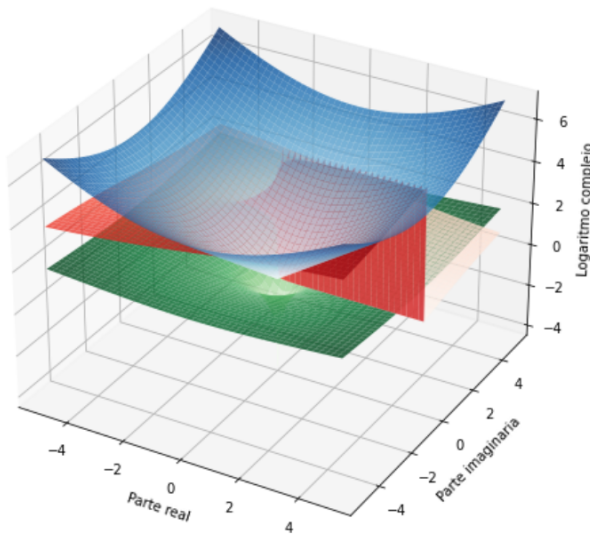
$$\Rightarrow \log(z) = \underbrace{\ln(R)}_{|z|} + i \underbrace{\theta}_{\arg(z)}$$

$$\text{Si } z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

No obstante hay un problema con esta definición pues al dar vueltas en el plano complejo ($\theta = \theta_0 + 2k\pi$), la parte asociada al ángulo del logaritmo aumenta sin restricción lo que causa que de un pto salgan 2 salidas (ya que hay ∞ formas de describir el ángulo). La solución a ello es restringir el ángulo a intervalos acotados. El corte más usado es $\theta \in (-\pi, \pi)$ lo que causa que $\log(z)$ sólo esté definido para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.



Rama principal del logaritmo complejo



$\text{Re}(\log(z))$
 $|\log(z)|$
 $\text{Im}(\log(z))$

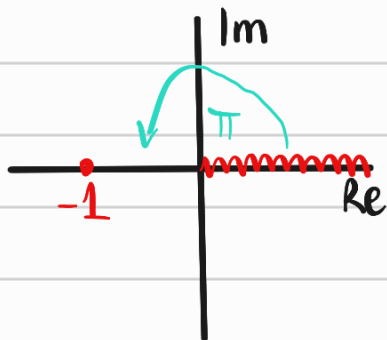
c) El objetivo de esta pregunta es ver que cosas que no están bien definidas en los reales tales como x^α , con $x < 0$ y $0 < \alpha < 1$; sí se pueden definir en los complejos. Usando la indicación:

$$(-1)^\alpha = \exp(\alpha \log(-1)) \quad (\star)$$

no está definido en $\mathbb{R}$. Que bueno que en el ítem anterior extendimos su def a $\mathbb{C}$

Calculando $\log(-1)$ aparte usando la regla del ítem anterior:
 $\log(-1) = \ln \cancel{1} + i \arg(-1)$
 $\quad \quad \quad \swarrow 0$
 $\quad \quad \quad = i \arg(-1)$

En principio hay ∞ ángulos para representar a -1 , no obstante nos ceñimos a una rama para que $\log$ efectivamente sea función. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$



$$\Rightarrow \log(-1) = i \arg(-1) = i\pi$$

Reemplazando en $(\star)$:

$$(-1)^\alpha = \exp(\alpha \log(-1)) = e^{i\alpha\pi}$$

P₂ [Polos]

a) Polos de $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Para ver sing. simplemente hay que imponer cuando se indefine la función. En este caso es fácil ver que los z tq $\cos(z)=0$ son singularidades. Por lo tanto:

$$\cos(z) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \underline{z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

polos de $\tan(z)$

Los polos también tienen orden, el cual se obtiene viendo el valor del sgte límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z) \neq 0 \Rightarrow z_0 \text{ polo de orden } k$$

Para este caso:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_n} (z-z_n) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} &= \underbrace{\sin(z_n)}_{\text{bien definido}} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{z-z_n}{\underbrace{\cos(z)-\cos(z_n)}_{=0}} \\ &\quad \text{def derivada} \\ &= - \frac{\cancel{\sin(z_n)}}{\cancel{\sin(z_n)}} \cdot \frac{1}{\cos'(z_n)} = - \frac{1}{\sin(z_n)} \neq 0 \neq \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow z_n$ polos de orden 1

b) Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Veamos denominador para los polos:

$$\begin{aligned} 1+z^4 &= (z^2+i)(z^2-i) \quad \text{/ suma por dif.} \\ &= (z+i\sqrt{i})(z-i\sqrt{i})(z+\sqrt{i})(z-\sqrt{i}) \\ &\quad z_4 = -i\sqrt{i} \quad z_2 = i\sqrt{i} \quad z_3 = -\sqrt{i} \quad z_1 = \sqrt{i} \\ &\quad \text{polos simples (orden 1)} \end{aligned}$$

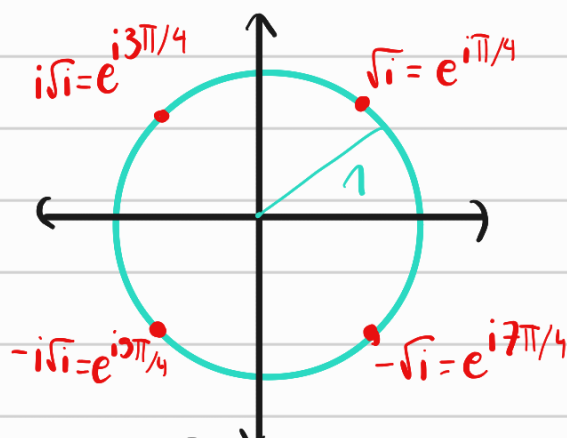
Pero hay una forma más compacta de representarlas, ocupando la fórmula de euler (qué casualidad).

Notamos que i en forma polar es $e^{i\pi/2}$. Esto implica que $\sqrt{i} = (i)^{1/2} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4}$. Además $-1 = e^{i\pi}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{i} = e^{i\pi/4} \\ z_2 &= i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z_3 &= -\sqrt{i} = e^{i\pi} e^{i\pi/4} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ z_4 &= -i\sqrt{i} = e^{i\pi/2} e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \end{aligned}$$

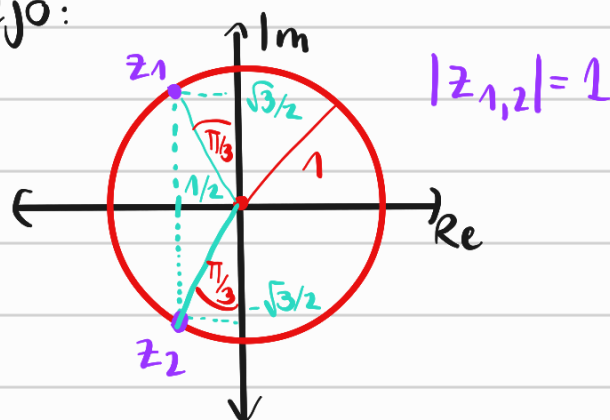
$$\Rightarrow z_k = e^{i \frac{(2k-1)\pi}{4}} \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Es decir, en el plano complejo



c) $\frac{1}{1+z^2+z}$. Imponiendo $z^2+z+1=0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4}}{2}$
 $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 polos simples

En el plano complejo:



d) $e^{1/z}$ en este caso la singularidad es claramente $z=0$. No obstante es especial ya que si intentas calcular su orden:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k e^{1/z}$$

Expandiendo $e^{1/z}$ en serie de Taylor:

$$u = \frac{1}{z} \begin{cases} e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \\ e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \end{cases}$$

Reemplazando en el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{n!} = \frac{1}{z^{n-k}} \text{ si } k < n$$

Viendo la sumatoria, para un k arbitrario siempre habrá un $n > k$ tal que el límite esté mal definido en $z=0$, por lo que no hay ningún orden permitido. A este tipo de singularidades se les llama esenciales.

P₃

Considerando la indicación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz$$

Realizamos el syte cambio de variable:

$$u = \frac{\sqrt{z}}{(1-i)} z \Rightarrow \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} du = dz$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{(1-i)^2}{2} u^2$$

$$z^2 = \frac{1-2i-1}{2} u^2$$

$$z^2 = -i u^2$$

Por lo que la integral queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i \cdot + i u^2} (1-i) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = (1-i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du (*)$$

Integral gaussiana
(vista en CVU) = $\sqrt{\pi}$

Dem

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

cv $x = r \cos \theta$ $\theta \in [0, 2\pi]$
 $y = r \sin \theta$ $r \in [0, \infty]$

$$dx dy = |J| dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

cv $s = -r^2 \Rightarrow ds = -2r dr$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{-\infty} \frac{1}{2} e^s ds$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^1 - e^{-\infty})$$

$$I^2 = \pi$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Por tanto reemplazando en (*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = (1-i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{1-i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (*)$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{1-i} e^{-iz^2} = (\cos(z^2) - i \sin(z^2)) \left| \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right|$$

$$= (\cos(z^2) - i \sin(z^2)) \frac{1+i}{1-i}$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(z^2) + \sin(z^2) + i(\cos(z^2) - \sin(z^2))] \quad (\star)$$

De esta manera definiendo $I_c = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z^2) dz$ y $I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(z^2) dz$, tenemos que reemplazando ($\star$) en (*):

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(z^2) dz}_{I_c} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(z^2) dz}_{I_s} + i \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(z^2) dz}_{I_c} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(z^2) dz}_{I_s} \right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0 \cdot i$$

parte real
 $= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

parte imaginaria

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} I_c + I_s = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} & (1) \\ \hline I_c - I_s = 0 & (2) \end{array}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2I_c = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{directo de (2)}$$

$$I_c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore I_c = I_s = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$