Auxiliar 3

Teorema de Green y de la divergencia

Profesor: Ariel Pérez
Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [Teorema de Green con agujeros]
Usando el Teorema de Green, calcule la siguiente integral de línea

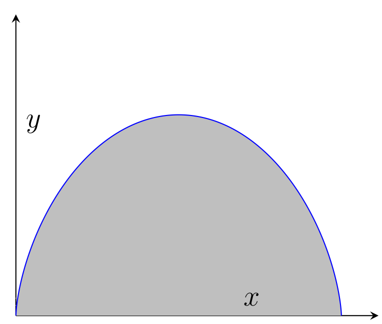
$$\oint_C \left(\frac{x - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\frac{y + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} dy\right)$$

donde C es el cuadrado de vértices $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ y $(0,-2)$ recorrida en sentido antihorario.

P2. [Áreas con teorema de Green]
Hallar el área delimitada por un arco de cicloide, con parametrización:

$$\vec{r}(\theta) = (a(\theta - \sin\theta), a(1 - \cos\theta)) \quad a > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

y el eje x.



P3. [Teorema de la divergencia]
Sea S la porción de paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitado por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1 + \cancel{8}4\rho^2}}$$

b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo.

c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia en este dominio? Justifique su respuesta.

d) Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$

P4. (Propuesto)

Considere el potencial de Coulomb $V(r) = \frac{K}{r}$.

a) Calcule explícitamente, usando operadores diferenciales en coordenadas esféricas el valor de $\nabla^2 V$ para $r > 0$.

b) Usando el Teorema de Gauss calcule

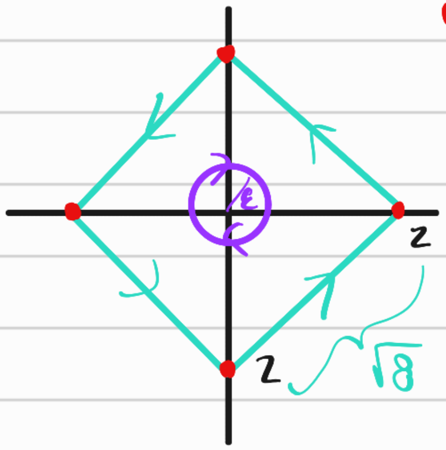
$$\iiint_{B(0,\epsilon)} \nabla^2 V dV$$

donde $B(0, \epsilon)$ es la bola de radio ϵ centrada en el origen.

c) Utilizando los 2 resultados anteriores especule la forma de la función $\nabla^2 V \ \forall \vec{r}$.

P_1

a) $$\oint_C \underbrace{\left(\overset{M}{\frac{x - yx^2 - y^3}{x^2+y^2}}, \overset{N}{\frac{y + x^3 + xy^2}{x^2+y^2}}\right)}_{\vec{F}} \cdot d\vec{r}$$



$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x\left(y+x^3+xy^2\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x^2-3y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y\left(x-yx^2-y^3\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$(-)$

$$\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3x^2+y^2-(-x^2-3y^2)}{x^2+y^2} - \frac{\cancel{2xy} + 2x^4 + 2x^2y^2 - \cancel{2xy} + 2y^2x^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{4\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} - \frac{2\cancel{(x^4+2x^2y^2+y^4)}}{\cancel{(x^2+y^2)^2}}$$

$$= 4 - 2 = 2$$

Por Green en $\partial S = C \cup \partial_\varepsilon$ ($\vec{F}$ tiene discontinuidad en 0)

$$\oint_{\partial S} (M,N) \cdot d\vec{r} = \iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{=2} dx\,dy$$

$$\int_C (M,N) \cdot d\vec{r} + \int_{\partial\varepsilon} (M,N) \cdot d\vec{r} = 2 \underbrace{\iint_S dx\,dy}$$

área del cuadrado − ~~área círculo radio ε~~ $\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

$A = a^2$, a lado del cuadrado

$= \sqrt{8}^2 = 8$

$$\Rightarrow \int_C (M,N) \cdot d\vec{r} = 16 - \int_{\partial\varepsilon} (M,N) \cdot d\vec{r}$$

Calculemos $-\int_{\partial\varepsilon} (M,N) \cdot d\vec{\ell}$ (se orienta horario $\Rightarrow \int_{\partial\varepsilon} (M,N) \cdot d\vec{\ell}$ antihorario)

Parametrizamos $\vec{r}(\theta) = (\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$\vec{r}'(\theta) = (-\varepsilon\sin\theta, \varepsilon\cos\theta)$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = \frac{1}{\cancel{\varepsilon^2}}\begin{pmatrix} \cancel{\varepsilon}\cos\theta - \varepsilon^{\cancel{3}2}\cos^2\theta\sin\theta - \varepsilon^{\cancel{3}2}\sin^3\theta \\ \cancel{\varepsilon}\sin\theta + \varepsilon^{\cancel{3}2}\cos^3\theta + \varepsilon^{\cancel{3}2}\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\begin{pmatrix} \cos\theta - \varepsilon^2\cos^2\theta\sin\theta - \varepsilon\sin^3\theta \\ \sin\theta + \varepsilon^2\cos^3\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cancel{\varepsilon}\sin\theta \\ \cancel{\varepsilon}\cos\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\cancel{-\sin\theta\cos\theta} + \varepsilon^2\cos^2\sin^2\theta + \varepsilon\sin^3\theta + \varepsilon\sin\theta\cos\theta + \cancel{\sin\theta\cos\theta} + \varepsilon^2\cos^3\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta \Big) d\theta$$

$\varepsilon \to 0$ todas la integrales se van a 0:

$$\boxed{\int_C (M,N)\cdot d\vec{\ell} = 16}$$

P_2

Área por definicion es:

$$\acute{A} = \iint_S dA$$

Recordamos el Teo de Green:

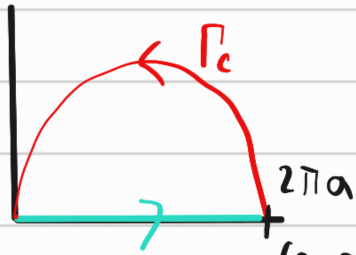
$$\oint_{\partial S} (M,N)\cdot d\vec{r} = \iint_S \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{\text{Si esto es 1, se calcula el área}} dxdy$$

De esta manera, si el campo $\vec{F} = (M(x,y), N(x,y))$ es tal que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$, es posible calcular el área de una superficie mediante una integral de linea sobre la frontera de la misma. No obstante hay infinitas elecciones para $M(x,y)$ y $N(x,y)$. En particular nos interesará de la que resulten integrales sencillas. Las más comunes son:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ M=-y \ \wedge \ N=0 \\ 2)\ M=0 \ \wedge \ N=x \\ \ \vdots \ \text{etc} \end{array}\right\} \text{comprueban que } \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

Escogeremos 1) ya que facilita los cálculos (intuición a desarrollar haciendo varios ejercicios). La integral a calcular es entonces:

$$\acute{A} = \oint_{\partial S} (-y,0)\cdot d\vec{r}$$



Sea Γ_c el arco de cicloide y Γ_r la recta que une $(0,0)$ con $(2\pi a,0)$. Se comprueba que $\partial S = \Gamma_c \cup \Gamma_r$, por lo tanto

$$\acute{A} = \int_{\partial S} (-y,0)\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\Gamma_c} (-y,0)\Big|_{\vec{r}_{cicloide}} \cdot dr + \underbrace{\cancel{\int_{\Gamma_r} (-y,0)\Big|_{\vec{r}_{recta}} \cdot d\vec{r}}}_{=0}$$

$$= \int_{\Gamma} (-y,0)\Big|_{\vec{r}_{cicloide}} \cdot d\vec{r}$$

0 ya que y vale 0 en Γ_r

Por enunciado la parametrización de la cicloide es:

$$\vec{r}(\theta) = \big(a(\theta - \sin\theta),\, a(1-\cos\theta)\big) \quad \theta \in [0,2\pi]$$

Además $d\vec{r} = r'(\theta)\,d\theta$, por tanto:

$$r'(\theta) = \big(a(1-\cos\theta),\, a\sin\theta\big)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = (-y,0) = \big(-a(1-\cos\theta),\, 0\big)$$

$$\Rightarrow \acute{A} = \int_{2\pi}^{0} \big(-a(1-\cos\theta),\, 0\big)\cdot\big(a(1-\cos\theta),\, a\sin\theta\big)\, d\theta$$

límites así ya que se parte en $\theta = 2\pi$ por la orientación de la curva

$$= +\int_0^{2\pi} +a^2(1-\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= a^2\Big[\int_0^{2\pi} d\theta - 2\underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos\theta}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\Big]$$

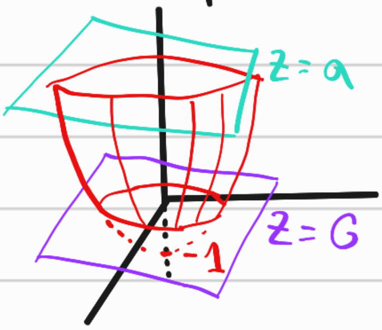
=0 fn periodica integrada en periodo

$$= a^2\Big[2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \Big(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\Big)\, d\theta}_{\pi}\Big]$$

$$= \boxed{3\pi a^2}$$

P3

Sea S paraboloide con $z=\rho^2-1$ en coordenadas cilíndricas:



$$\vec{F}(\rho,\theta,z)=\frac{1}{\rho}\hat{\rho}+\arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

a) Para calcular normal exterior al paraboloide lo hacemos por definición teniendo la parametrización:

$$\vec{\sigma}(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho^2-1)$$

$\theta\in[0,2\pi]$
$z\in[0,a]$
$\Rightarrow 1\leq\rho^2\leq a+1$
$\Rightarrow \rho\in[1,\sqrt{a+1}]$

$$\boxed{\vec{n}=\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}}$$

Calculando las derivadas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}=(\cos\theta,\sin\theta,2\rho)\\ \dfrac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}=(-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\ \cos\theta&\sin\theta&2\rho\\ -\rho\sin\theta&\rho\cos\theta&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\rho^2\cos\theta\\ -2\rho^2\sin\theta\\ \rho\end{pmatrix}$$

apunta hacia arriba

Para que la normal exterior debe apuntar hacia abajo en $\hat{k}$ (por inspección de la figura). Por tanto:

$$\vec{n}_{ext}=-\left(\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\right)=\begin{pmatrix}2\rho^2\cos\theta\\ 2\rho^2\sin\theta\\ -\rho\end{pmatrix}$$

Para sacar $\hat{n}$ simplemente dividimos por norma:

$$\|\vec{n}_{ext}\| = \sqrt{4\rho^4(\cos^2+\sin^2\theta) + \rho^2}$$
$$= \rho\sqrt{4\rho^2+1}$$

$$\Rightarrow \hat{n}_{ext} = \frac{\vec{n}_{ext}}{\|\vec{n}_{ext}\|}$$
$$= \frac{1}{\cancel{\rho}\sqrt{4\rho^2+1}}\cancel{\rho}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2\rho\cos\theta \\ 2\rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{2\hat{\rho}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{k}}\right]$$
$$= \boxed{\frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{4\rho^2+1}}}$$

b) Utilizando def de flujo:

$= 0$ ya que campo sólo depende de $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{tapa inf}} \cancel{\vec{F}\cdot(-\hat{k})dA} + \iint_{\text{tapa sup}} \vec{F}\cdot\hat{k}\,dA + \iint_{\text{paraboloide}} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{a+1}} \vec{F}(\vec{\sigma}(\rho,\theta))\cdot\hat{n}\,dA$$

$$dA = d\rho\, d\theta \left\|\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\right\| = \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho\, d\theta$$

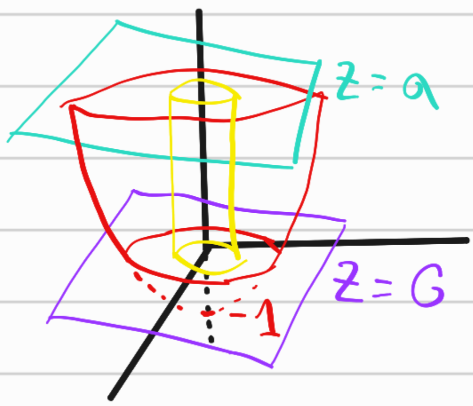
$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{1+a}} \left(\frac{1}{\cancel{\rho}}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}\right)\cdot\left(\frac{2\rho}{\cancel{\sqrt{4\rho^2+1}}}\hat{\rho} - \frac{\hat{k}}{\cancel{\sqrt{4\rho^2+1}}}\right)\cancel{\rho}\cancel{\sqrt{4\rho^2+1}}\,d\rho\, d\theta$$

Sólo sobrevive este término ya que el tiedro $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k}$ es base ortonormal $(\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = 1 \wedge \hat{\rho}\cdot\hat{k} = 0 \wedge \hat{\rho}\cdot\hat{\theta} = 0)$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_1^{\sqrt{a+1}} 2\rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \cancel{2}\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\Big|_1^{a+1}\cdot 2\pi$$
$$= \boxed{2\pi a}$$

c) No es posible dado que el campo no es diferenciable en $\rho=0$, es decir todo el eje z, y S encierra parte del eje z.

d) Para aplicar teo de la divergencia nos deshacemos del eje z poniendo un cilindro de radio $0<1<\sqrt{a+1}$ y lo aplicamos sobre el volumen encerrado por S y el cilindro.



$$\iiint_{\Omega\setminus\{\rho=0\}} \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Cilindro}} \vec{F}\cdot(-\hat{\rho})\,\underbrace{\rho\,dz\,d\theta}_{\text{elemento de área de manto cilíndrico}}$$

Calculando $\nabla\cdot\vec{F}$:

Hint div en cilíndricas $\qquad \vec{F}=\frac{1}{\rho}\hat{\rho}+\arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\cancel{\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}}_{0}+\cancel{\frac{\partial F_z}{\partial z}}_{0}\right)$$

$$=\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cancel{\rho}\,\frac{1}{\cancel{\rho}}\right)}^{0}$$

$$=0$$

$$\Rightarrow \iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=0$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = +\iint_{\text{Cilindro}} \vec{F}\cdot(+\hat{\rho})\,\rho\,dz\,d\theta$$

$$=\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\cancel{\rho}}\hat{\rho}+\cancel{\arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)}\right)\cancel{\rho}\,\hat{\rho}\,dz\,d\theta$$

$$=\int_0^a dz\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\boxed{2\pi a}$$ / resultado coincidente con b)

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{\text{cilindro}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 2\pi a$$

P4 (Propuesto) $V(r) = \frac{K}{r}$ definido para $r>0$

a)

Indicación: Ocupar Laplaciano en esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \dots$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \quad \forall r>0$$

Alternativa: Calcular en cartesianas donde se comprueba que:

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla^2 V = \nabla\cdot(\nabla V)$$

$$= \nabla\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}V(r), \frac{\partial}{\partial y}V(r), \frac{\partial}{\partial z}V(r)\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \quad \forall r>0$$

b) Ocupar Gauss:

angulo sólido

$$\iiint_{B(0,\varepsilon)} \nabla^2 V \, d\tau = \underbrace{\iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla V \cdot \hat{r} \, d\Omega}_{= -4\pi K}$$

c) Parece una contradicción los resultados anteriores la que $\nabla^2 V = 0$ debiese implicar que $\iiint_{B(0,\varepsilon)} \nabla^2 V \, d\tau = 0$. No obstante hay una trampa ya que la aplicación del teo de Gauss/divergencia no fue correcta. El teo tiene como hipótesis que el campo sea clase C^1 sobre el dominio de integración. En este caso el campo es: $\nabla V = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$ que claramente tiene una discontinuidad en $r=0$ punto $\in$ a $B(0,\varepsilon)$. Para extender la def en $r=0$ límite hacemos $\varepsilon \to 0$.

$$\iiint \nabla^2 V \, d\tau = -4\pi K$$

Si es que K cumple

$$K = \iiint K \, \underbrace{\delta^3(\vec{r})}_{\text{delta de dirac}} \, d\tau$$

Entonces:

$$\iiint \nabla^2 V \, d\tau = \iiint (-4\pi K \, \delta^3(\vec{r})) \, d\tau$$

Igualando integrandos

$$\nabla^2 V = -4\pi K \, \delta^3(\vec{r})$$

esta función es extraña, debe ser 0 para $r>0$ y debe cumplir $K = \iiint K \, \delta(\vec{r}) \, d\tau$ para ser consistente. Recomiendo buscar en Google: "Delta de Dirac"

(igual esto no entra en el C1 xd)