Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002-2 – Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Auxiliar 3

Teorema de Green y de la divergencia

Profesor: Ariel Pérez
Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [Teorema de Green con agujeros]
Usando el Teorema de Green, calcule la siguiente integral de línea

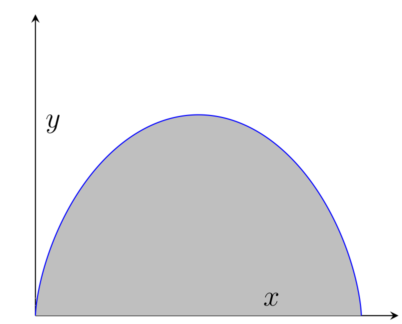
$$\oint_C \left(\frac{x - yx^2 - y^3}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{y + x^3 + xy^2}{x^2+y^2} dy\right)$$

donde C es el cuadrado de vértices $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ y $(0,-2)$ recorrida en sentido antihorario.

P2. [Áreas con teorema de Green]
Hallar el área delimitada por un arco de cicloide, con parametrización:

$$\vec{r}(\theta) = (a(\theta - \sin\theta), a(1-\cos\theta)) \quad a > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

y el eje x.



P3. [Teorema de la divergencia]
Sea S la porción de paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitado por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1+4\rho^2}}$$

b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior, directamente utilizando la definición de integral de flujo.

c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia en este dominio? Justifique su respuesta.

d) Utilice el teorema de la divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo a través del cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid 0 < z < a\}$

P4. (Propuesto)

Considere el potencial de Coulomb $V(r) = \frac{K}{r}$.

a) Calcule explícitamente, usando operadores diferenciales en coordenadas esféricas el valor de $\nabla^2 V$ para $r > 0$.

b) Usando el Teorema de Gauss calcule

$$\iiint_{B(0,\epsilon)} \nabla^2 V \, d\tau$$

donde $B(0, \epsilon)$ es la bola de radio ϵ centrada en el origen.

c) Utilizando los 2 resultados anteriores especule la forma de la función $\nabla^2 V \; \forall \vec{r}$.