Auxiliar 1

Parametrizaciones e integrales de línea

Profesor: Ariel Pérez
Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [**Parametrizaciones típicas**]
Encuentre una parametrización para las siguientes curvas (todas recorridas en sentido antihorario:

a) La parábola dada por $y = x^2$, con $x \in [0, a],\ a > 0$.
b) Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.
c) Una elipse centrada en el origen con semiejes a y b en el plano $z = 2$.
d) La curva que resulta de la intersección entre el manto cilíndrico de ecuación $x^2+y^2-1 = 0$ y el plano $y + z - 2 = 0$.

P2. [**Longitud de arco**]
Dada una curva C descrita en coordenadas polares ($\vec{r}(r, \phi)$) por la ecuación $r = f(\phi)$, con $\phi \in [a, b]$, se pide demostrar que su longitud de arco es

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\, d\phi$$

Utilice este resultado para calcular el largo de la cicloide de ecuación $r = A(1 + \cos(\phi))$.

P3. [**Integral de línea**]
Se pide calcular la siguiente integral:

$$\int_\Gamma (x^2y, 2y, x) \cdot \vec{dr}$$

A lo largo del camino cerrado Γ limitado por los arcos $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ y Γ_3 dados por las ecuaciones:

$$\Gamma_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\} \tag{1}$$
$$\Gamma_2 = \{2x + z = 1,\ y = 0,\ x \geq 0,\ z \geq 0\} \tag{2}$$
$$\Gamma_3 = \{4x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \tag{3}$$

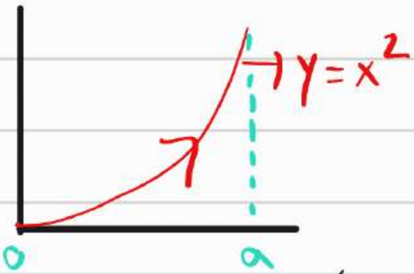
P4. [**Lemniscata**] **(Propuesto)**
Parametrice la curva plana $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ cuyos puntos satisfacen que el producto de las distancias a 2 focos en la abscisa $(d, 0)$ y $(-d, 0)$ es constante y verifican la siguientes relación:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)$$

Una vez parametrizada comente en relación a su continuidad ¿Con un sólo intervalo para la variable se recorre toda la curva? ¿en qué podría afectar si esto no es así?

P_1

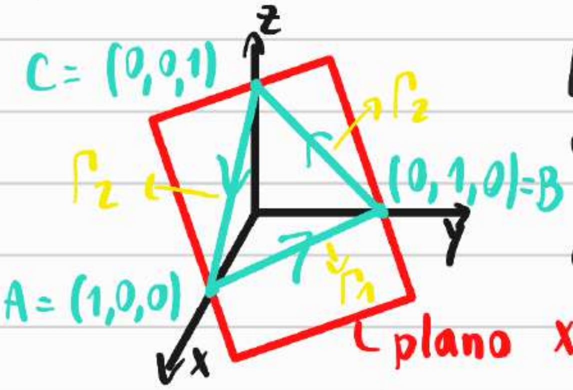
a) Parabola de ecuación $y=x^2$ $x\in[0,a]$. Primero hacemos un dibujo:



Para parametrizar debemos escribir x e y en función de una variable a elección. En este caso es fácil ver que: $\vec{r}(t)=(t,t^2)$ $t\in[0,a]$ cumple lo pedido

b) Parametrización del triángulo formado por la intersección del plano $x+y+z=1$ y los ejes coordenados en el primer octante $(x,y,z\geq 0)$

Primero hacemos un dibujo del plano e identificamos los ptos de intersección con los ejes:



Los ptos. de ∩ se hallan imponiendo el resto de coord. = 0, menos la del eje de interés y ver en ecc. del plano el valor.

Calculados los ptos, para parametrizar el triángulo vemos los segmentos de recta que los unen, recordando la expresión general de parametrización de una recta:

Parametrización recta
$\vec{r}(t)=tP_f+(1-t)P_i$, $t\in[0,1]$
P_i: pto inicial
P_f: pto final

Definimos las rectas como sigue:

$\Gamma_1=\overline{AB}$ importa el orden!
$\Gamma_2=\overline{BC}$
$\Gamma_3=\overline{CA}$

Γ_1: $P_i = (1,0,0) \wedge P_f(0,1,0)$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(t) = t(0,1,0) + (1-t)(1,0,0)$$
$$= \boxed{(1-t, t, 0)} \quad t \in [0,1]$$

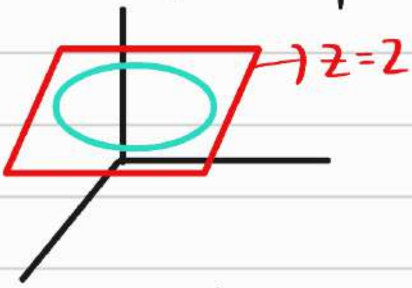
Γ_2: $P_i = (0,1,0) \wedge P_f = (0,0,1)$

$$\Rightarrow \vec{r}_2(t) = t(0,0,1) + (1-t)(0,1,0)$$
$$= \boxed{(0, 1-t, t)} \quad t \in [0,1]$$

Γ_2: $P_i = (0,0,1) \wedge P_f = (1,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{r}_3(t) = t(1,0,0) + (1-t)(0,0,1)$$
$$= \boxed{(t, 0, 1-t)} \quad t \in [0,1]$$

c) Una elipse de semiejes a y b con $z = 2$.



Ec de elipse (2D)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Notamos que la elección $x = a\cos(t) \wedge y = b\sin(t) \wedge z = 2$ cumple con todas las ecs $\left((x/a)^2 + (y/a)^2 = 1 \wedge z = 2\right)$. Por tanto:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t), 2) \quad t \in [0, 2\pi]$$

da la vuelta completa

d) Intersección entre $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $y + z - 2 = 0$. Reescribiendo:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$
$$y + z = 2 \quad (2)$$

Notamos que la elección $x = \cos(t) \wedge y = \sin(t)$ satisface (1). Ahora reescribamos (2):

$$z = 2 - y \because \sin(t)$$
$$= 2 - \sin(t)$$

Por lo que la parametrización completa es:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 2 - \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

P_2

Se pide calcular la longitud de arco de una curva C descrita en coordenadas polares $\Rightarrow \vec{r}=\vec{r}(r,\phi)$ con $r=f(\phi)$

La parametrización clásica de polares:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi) \quad \phi \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\phi) = (f(\phi)\cos(\phi), f(\phi)\sin(\phi))$$

Recordando formula de longitud de arco a partir de parametrización:

$$L=\int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right\| d\phi$$

Calculemos $\frac{d\vec{r}}{d\phi}$:

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \left(\cos\phi \frac{df}{d\phi} - f\sin\phi,\ \sin\phi \frac{df}{d\phi} + f\cos\phi\right)$$

Sacando norma:

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right\| = \left(\left(\cos\phi \frac{df}{d\phi} - f\sin\phi\right)^2 + \left(\sin\phi \frac{df}{d\phi} + f\cos\phi\right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\left(\frac{df}{d\phi}\right)^2 \cos^2(\phi) \cancel{- 2f\frac{df}{d\phi}\cos\phi\sin\phi} + f^2\sin^2\phi + \left(\frac{df}{d\phi}\right)^2 \sin^2\phi \cancel{+ 2f\frac{df}{d\phi}\sin\phi\cos\phi} + f^2\cos^2\phi \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{df}{d\phi}\right)^2 + f^2\right]\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1}}$$

$$= \sqrt{f^2 + \left(\frac{df}{d\phi}\right)^2}$$

Como $r=f(\phi)$, la longitud de curva queda:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\, d\phi}$$

Aplicando la formula para $r = A(1+\cos(\phi))$ $\phi \in [0,2\pi]$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = (A + A\cos\phi)^2 + (-A\sin\phi)^2$$
$$= A^2 + A^2\cancel{\cos^2\phi} + 2A^2\cos\phi + A^2\cancel{\sin^2\phi}$$
$$= 2A^2 + 2A^2\cos\phi$$
$$= 2A^2(1+\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sqrt{2A^2(1+\cos\phi)}\, d\phi$$

$$= \sqrt{2}\, A \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\phi}\, d\phi$$

Haciendo uso de identidades trigonometricas:

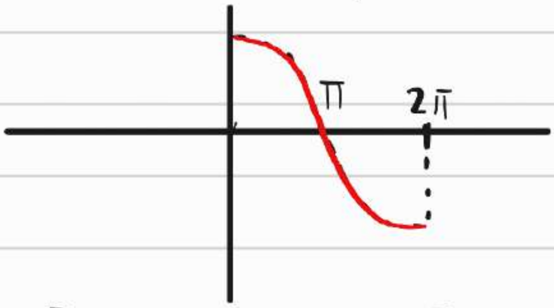
$$\cos^2(\phi/2) = \frac{1+\cos(\phi)}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos(\phi) = 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Reemplazando:

$$L = A\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\, d\phi$$

$$= 2A \int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right| d\phi$$



$$\Rightarrow L = 2A\left[\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi\right]$$

$$= 2A\left(2\left[\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \cancel{\sin(0)}\right] - 2\left[\cancel{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right]\right)$$

$$= \boxed{8A}$$

P3 Piden calcular la sgte integral de línea cerrada sobre Γ:

$$\oint_\Gamma (x^2y, 2y, x)\cdot \vec{dl}$$

Donde Γ se escribe como la unión de 3 caminos Γ_i, los cuales se definen por ecc dadas:

$$\Gamma_1 = \{x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ z\geq 0,\ y\geq 0\}$$

(circunferencia unitaria en plano YZ)

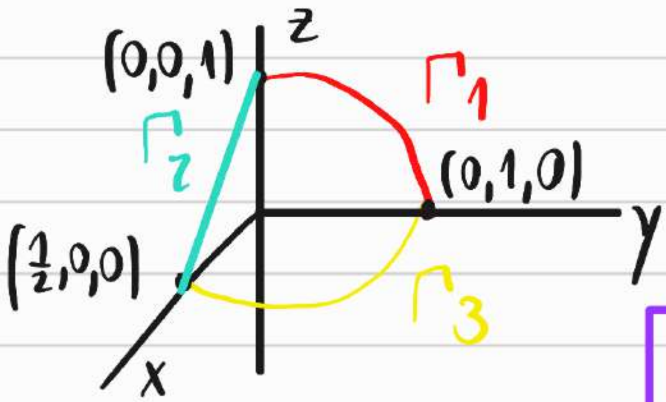
$$\Gamma_2 = \{2x+z=1,\ y=0,\ z\geq 0,\ x\geq 0\}$$

(recta de ecc $2x+z=1$ en plano XZ)

$$\Gamma_3 = \{4x^2+y^2=1,\ z=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

(elipse de ecc canónica $x^2/(1/2)^2+y^2=1$ en plano XY)

El dibujo de la situación es el sgte:



$$\boxed{\vec{F} \equiv (x^2y, 2y, x)}$$

Y la integral de linea, por tanto, se puede calcular como:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dl} = \underbrace{\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot\vec{dl}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot\vec{dl}}_{I_2} + \underbrace{\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot\vec{dl}}_{I_3}$$

$$I_1 = \int_a^b \underbrace{\vec{F}(\vec{r}_1(t))\,\vec{r}_1{}'(t)}_{\text{hay que calcular estas 2 cosas y estamos}}dt$$

Parametrización Γ_1 (circunf. unitaria en plano YZ):

$$\vec{r}_1(t) = (0, \cos(t), \sin(t))$$
$$t \in [0, \pi/2]$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = (0, 2\cos(t), 0) \quad / \vec{F} = (x^2y, 2y, x)$$
$$\vec{r}_1'(t) = (0, -\sin(t), \cos(t))$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi/2} (0, 2\cos(t), 0) \cdot (0, -\sin(t), \cos(t))\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} -2\cos(t)\sin(t)\, dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} -\sin(2t)\, dt$$
$$= -\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt$$
$$= -\frac{1}{2}\left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)}^{-1} - \cancel{\cos(0)}^{0}\right)$$
$$= \frac{-2}{2}$$
$$= \boxed{-1}$$

$$\Gamma_2 = \{2x + z = 1, z = 0, y \geq 0, x \geq 0\}$$

Recta. $\vec{r}(t) = A + t(B - A)$, $t \in [0, 1]$

$$A = (0, 0, 1)$$
$$B = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2(t) = (0, 0, 1) + t\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$
$$= \left(\frac{t}{2}, 0, 1 - t\right)$$

$$\vec{F} = (x^2y, 2y, x)$$
$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(0, 0, \frac{t}{2}\right)$$

$$r_2'(t) = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 \left(0, 0, \frac{t}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) dt$$

$$= \int_0^1 -\frac{t}{2}\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 t\, dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1} = 1,\ z = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$$

Parametrización elipse:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t), 0)$$

a y b semiejes elipse

$$\Rightarrow \vec{r}_3(t) = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\cos(t)}_{x},\ \underbrace{\sin(t)}_{y},\ 0\Big)$$

$$\vec{F}(\vec{r}_3(t)) = \left(\frac{1}{4}\cos^2(t)\sin(t), 2\sin(t), \frac{1}{2}\cos(t)\right)$$

$$\vec{r}_3{}'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin(t), \cos(t), 0\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos^2(t)\sin(t), 2\sin(t), 0\right)\left(-\frac{1}{2}\sin(t), \cos(t), 0\right)$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} 2\sin(t)\cos(t)$$

$$= -\frac{1}{32}\int_0^{\pi/2} (2\cos(t)\sin(t))^2\,dt + \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{32}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2t)\,dt + \left(-\frac{\cos(2t)}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{32}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt + 1$$

$$= -\frac{1}{64}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]\Big|_0^{\pi/2} + 1$$

$$= -\frac{\pi}{128} + 1$$

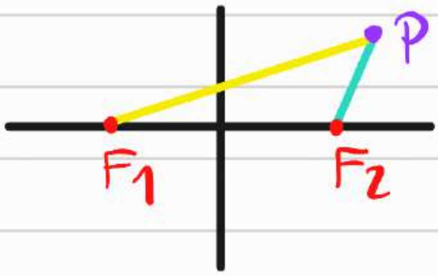
Y la integral final es:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 + I_3 = \cancel{-1} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{128} \cancel{+1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{128}$$

P_3

El objetivo de esta pregunta es parametrizar la curva que susptos satisfacen que el producto de la distancia a 2 focos en el eje de las abscisas $(-d,0)$ y $(0,d)$ es cte. Esto se traduce en:



$$\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2} = cte \equiv 2d^2$$

De esta ecc se obtiene la formula de la lemniscata que es:

$$(x^2+y^2)^2 = 2d^2(x^2-y^2)$$

ecc de la lemniscata de Bernoulli

Queremos parametrizar esta curva por tanto debemos definir una variable y escribir las coordenadas x e y en función de ella. Generalmente cuando veamos cosas del estilo $\sim(x^2+y^2)$ será bueno pasar a coord. polares ya que se facilitirán los calculos. El cv usuales:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Reemplazando en la ecc de la curva:

$$(x^2+y^2)^2 = 2d^2(x^2-y^2)$$

$$\Big(r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}\Big)^2 = 2d^2r^2\underbrace{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}_{=\cos(2\theta)}$$

$$r^{\cancel{4}\,2} = 2d^2\cancel{r^2}\cos(2\theta)$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = d\sqrt{2\cos(2\theta)}}$$

Con esta expresión para r volvemos a nuestras ecc parametricas para "x" e "y" y reemplazamos:

$$x = d\sqrt{2\cos(2\theta)}\cos(\theta)$$
$$y = d\sqrt{2\cos(2\theta)}\sin(\theta)$$

Que es justamente lo que buscabamos por lo que la parametrización será:

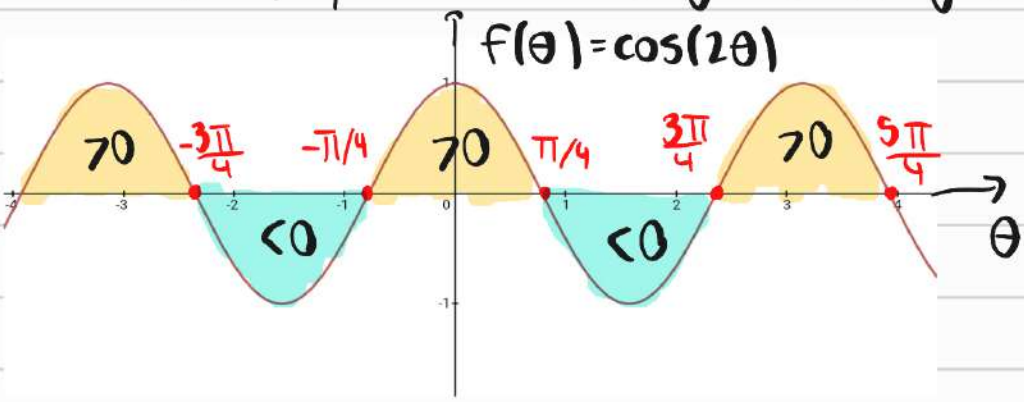
$$\vec{r}(\theta) = d\sqrt{2\cos(2\theta)}\,(\cos(\theta), \sin(\theta))$$

No obstante falta definir en qué intervalo se mueve θ!! Intuitivamente la respuesta es $[0, 2\pi)$ sin embargo hay un problema. Recordando expresión para r:

$$r = d\sqrt{2\cos(2\theta)}$$

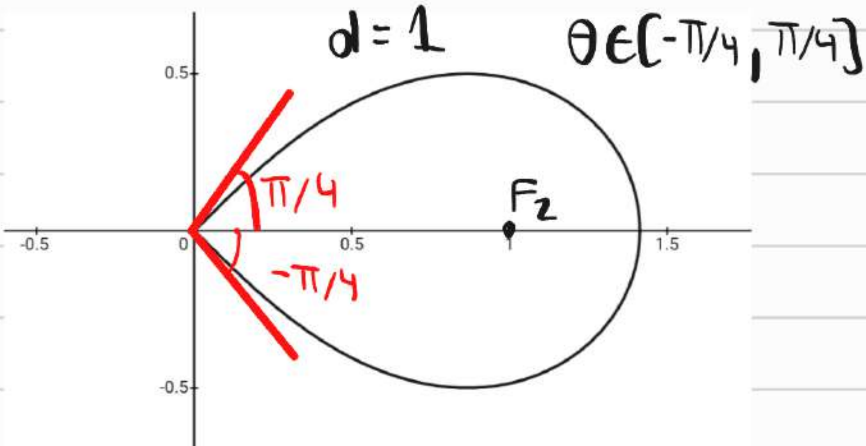
La raíz no puede ser negativa!! y $\cos(2\theta)$ no siempre es >0

Grafiquemos $\cos(2\theta)$ para ver signos mejor:



Solo están ermitidos intervalos >0

Por lo que un intervalo posible para θ es $[-\pi/4, \pi/4]$, pero para recorrer toda la lemniscata no basta con este (solo recorre la mitad)



Para recorrer la otra mitad hay que moverse a otro intervalo permitido, por ej $[3\pi/4, 5\pi/4]$ no obstante el salto no es continuo, lo que no es deseable para calcular integrales de línea sobre todo el camino por ej. La solución a esto es encontrar otra parametrización a partir de la anterior. Esto lo haremos con algunas identidades trigonométricas un poco antojadizas, pero tienen razones más profundas que se escapan un poco del foco. son las sgtes:

- $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan(\theta)}}$
- $\cos(2\theta) = \dfrac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$

reemplazando en:

$$x = d\sqrt{2\cos(2\theta)}\cos(\theta)$$
$$y = d\sqrt{2\cos(2\theta)}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = d\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{1-\tan^2\theta}}{1+\tan^2\theta} \\ y = d\sqrt{2}\,\dfrac{\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}}{1+\tan^2\theta} \end{cases}$$

Realizando el sgte cv (cambio de variable):

$$\tan\theta = \cos\varphi$$
$$\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \Rightarrow \tan\theta \in [-1,1]$$
$$\Rightarrow \cos\varphi \in [-1,1]$$
$$\Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi]$$

Además $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$, por lo que la expresión parametrica final es:

$$x = d\sqrt{2}\,\frac{\sin\varphi}{1+\cos^2\varphi}$$
$$y = d\sqrt{2}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

La cual es continua y recorre toda la lemniscata.