

Auxiliar 1

Parametrizaciones e integrales de línea

Profesor: Ariel Pérez

Auxiliares: Bruno Pollarolo y Sebastián Flores

P1. [Parametrizaciones típicas]

Encuentre una parametrización para las siguientes curvas (todas recorridas en sentido antihorario):

- a) La parábola dada por $y = x^2$, con $x \in [0, a]$, $a > 0$.
- b) Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.
- c) Una elipse centrada en el origen con semiejes a y b en el plano $z = 2$.
- d) La curva que resulta de la intersección entre el manto cilíndrico de ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y el plano $y + z - 2 = 0$.

P2. [Longitud de arco]

Dada una curva C descrita en coordenadas polares $(\vec{r}(r, \phi))$ por la ecuación $r = f(\phi)$, con $\phi \in [a, b]$, se pide demostrar que su longitud de arco es

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

Utilice este resultado para calcular el largo de la cicloide de ecuación $r = A(1 + \cos(\phi))$.

P3. [Integral de línea]

Se pide calcular la siguiente integral:

$$\int_{\Gamma} (x^2y, 2y, x) \cdot d\vec{r}$$

A lo largo del camino cerrado Γ limitado por los arcos Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 dados por las ecuaciones:

$$\Gamma_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y \geq 0, z \geq 0\} \quad (1)$$

$$\Gamma_2 = \{2x + z = 1, y = 0, x \geq 0, z \geq 0\} \quad (2)$$

$$\Gamma_3 = \{4x^2 + y^2 = 1, z = 0, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (3)$$

P4. [Lemniscata] (Propuesto)

Parametrice la curva plana $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ cuyos puntos satisfacen que el producto de las distancias a 2 focos en la abscisa $(d, 0)$ y $(-d, 0)$ es constante y verifican la siguientes relación:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)$$

Una vez parametrizada comente en relación a su continuidad ¿Con un sólo intervalo para la variable se recorre toda la curva? ¿en qué podría afectar si esto no es así?