EXAMEN CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. BRUNO AGUILÓ Y JAVIERA CASTILLO

TIEMPO: 2 HORAS 15 MINUTOS

Pregunta 1

1. **Verdadero o Falso**. Justifique en dos o tres líneas su respuesta.
   - (1 punto) Una función $f = f(x,y)$ definida sobre $[0,1]\times[0,1]$ y para la cual, no importando quién sea el número q racional en $[0,1]$, la integral
   $$\int_0^1 f(q,y)dy,$$
   no existe, no puede ser integrable en $[0,1]\times[0,1]$.

2. (2.5 puntos) Calcular el volumen la región C encerrada por una porción de un hiperboloide en $\mathbb{R}^3$, entre las alturas -1 y 1, esto es
$$C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z\in(-1,1),\ x^2+y^2-z^2<1\}.$$

3. (2.5 puntos) Sea B la región en $\mathbb{R}^2$ definida por la fórmula
$$B := \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \ : \ y^{1/3}\le x\}.$$
Calcule explícitamente
$$\int_B e^{x^4}dxdy.$$

Pregunta 2

1. **Verdadero o Falso**. Justifique en tres líneas su respuesta.
   - (1.5 puntos) Si $x_0\in\mathbb{R}^d$, con $\|x_0\|=1$, es un mínimo local de $f(x) := x^TAx$, bajo la restricción $\|x\|^2=1$, con $A\in M_{d,d}(\mathbb{R})$ simétrica, entonces x_0 es un vector propio de A.

2. Considere la función f definida en $\mathbb{R}^2$ por la fórmula
$$f(x,y) := xy.$$
Sea A la región cerrada del plano contenida por la *super elipse*
$$x^4+y^4=32.$$
   a) (1.5 puntos) Encuentre y clasifique todos los puntos críticos de f en el interior de A.
   b) (2.5 puntos) Encuentre todos los puntos de máximo y mínimo locales de f **sobre la frontera** de A, indicando claramente su naturaleza.
   c) (0.5 puntos) Encuentre (si existen), los puntos de máximo y mínimo globales de f sobre todo A.