

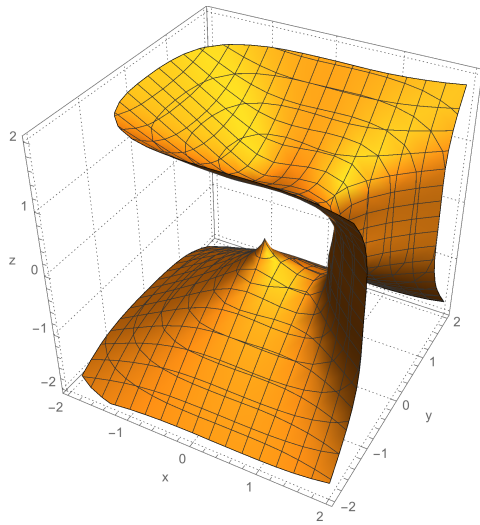
CONTROL 3 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2017

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO Y JOSÉ MANUEL PALACIOS
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS
TIEMPO: 2 HORAS 15 MINUTOS

La superficie suave S en \mathbb{R}^3 denominada “Vis à Vis”¹ está dada por los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que son soluciones de la ecuación

$$f(x, y, z) := x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0, \quad (S)$$

y para los cuales $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)^T$. (Ver figura abajo.) Notar que f de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 . En lo que sigue, considere los puntos $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1)$ y $P_3 = (\frac{2}{3}, 0, 0)$.



Parte 1

- (1 pto.) Calcule $\nabla f(x, y, z)$. ¿Están los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 en S ?
- (1 pto.) En la ecuación (S), ¿qué variable es posible despejar localmente, de manera C^1 , en función de las otras dos, en torno a cada uno de los puntos P_1 y P_2 ?
- (2.5 ptos.) Justifique, usando una combinación apropiada de resultados vistos en clases, que una primera aproximación de la función implícita $z = g(x, y)$ obtenida en P_2 en torno al punto $(x, y) = (0, 0)$ está dada por el paraboloide $z = g(x, y) \sim 1 + x^2 + y^2$.
- (1.5 ptos.) Suponga ahora que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ¿Es el sistema de ecuaciones $\nabla f(x, y, z) = (a, b, c)^T$ únicamente resoluble para (a, b, c) suficientemente cercanos a $(0, 0, -1)$ y (x, y, z) cercanos a P_2 ?

Parte 2

Observación importante: Escriba nuevamente al comienzo de esta pregunta los datos esenciales que obtuvo de la parte anterior.

- (2 ptos.) Calcule los puntos críticos de f definida ahora sobre todo \mathbb{R}^3 . ¿Están en S ? Determine la naturaleza de cada uno de ellos (máximo, mínimo locales, punto silla). ¿Posee f máximo o mínimo globales en \mathbb{R}^3 ?
- (3 ptos.) Muestre (justificando completamente su respuesta) que P_1 es el punto más cercano de S al punto P_3 sobre el plano $z = 0$.

Indicación. Le puede ser útil mostrar en algún momento que la ecuación cúbica en a

$$\frac{4}{9}a^2\left(1 + \frac{2}{3}a\right) + \frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{4}(a-1)^2 = 0,$$

no posee soluciones reales $a \geq 1$.

- (1 pto.) Sean C el cubo $[-2, 2]^4 \subseteq \mathbb{R}^4$ y \tilde{S} el conjunto extensión de S a C en \mathbb{R}^4 , es decir $\tilde{S} := \{(x, y, z, w) \in C : (x, y, z) \in S, w = 0\}$. Muestre que cualquier función escalar definida en C y continua sólo en $C \setminus \tilde{S}$, es integrable sobre C .

¹Creada por Herwig Hauser.