

CONTROL 2 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO E IAN LETTER

TIEMPO: 3 HORAS

Pregunta 1. Verdadero o Falso. Justifique en dos o tres líneas su respuesta (1.5 puntos cada una).

- (a) El plano tangente a la esfera de radio uno de \mathbb{R}^3 en el punto $(1, 0, 0)$ es $y = 1$.
- (b) No existe f diferenciable en \mathbb{R}^d tal que $\nabla f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.
- (c) Si $f(x, y) = \sin x + \sin y$, entonces $|f(x, y)| \leq \sqrt{2}$ para $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (d) Existe $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, de clase C^1 en \mathbb{R}^d y localmente invertible en torno a $x_0 \in \mathbb{R}^d$, pero para la cual $f'(x_0)$ no es invertible.

Pregunta 2

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) (1 pto.) Calcule (cuando existan) las derivadas direccionales de f en el origen.
- b) (1.5 ptos.) ¿Es f diferenciable en el origen?

2. Sea ahora $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) (2 ptos.) ¿Es g diferenciable en el origen?
- b) (1.5 ptos.) ¿Es g de clase C^1 en \mathbb{R}^2 ?

Pregunta 3

1. (3 ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , $f = f(u, v)$. Definamos

$$h(x, y) := f(yf(y, x), xf(x, y)).$$

Supongamos que $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = 3$. Probar que h es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 y encontrar $\nabla h(1, 1)$.

2. Sean $u, v \in \mathbb{R}$. Se desea resolver el sistema no lineal en (x, y)

$$(E) \quad \begin{cases} e^{x^2 - y^2} \cos(2xy) = u \\ e^{x^2 - y^2} \sin(2xy) = v \end{cases}$$

- a) (1 pto.) Si $(u, v) = (1, 0)$, encontrar una solución explícita (x_0, y_0) para (E).
- b) (2 ptos.) Si ahora (u, v) son tan cercanos a $(1, 0)$ como se quiera, justifique si existe siempre una única solución (x, y) cercana a (x_0, y_0) para (E).