

CONTROL 2 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. BRUNO AGUILÓ Y JAVIERA CASTILLO

TIEMPO: 3 HORAS

Pregunta 1

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0), \\ (x^2 - y^2) \log(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

- a) (1.5 puntos) Calcular las derivadas parciales de f en \mathbb{R}^2 .

Indicación: Puede usar, sin demostrarlo, que $\lim_{t \rightarrow 0} t \log |t| = 0$.

- b) (2 puntos) Estudie la continuidad de las derivadas parciales en \mathbb{R}^2 .

- c) (0.5 puntos) ¿Es f de clase C^1 en \mathbb{R}^2 ?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $(1, 2)$, con $D_v f(1, 2) = -5$ y $D_w f(1, 2) = 10$, y donde

$$v = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

son direcciones fijas.

- a) (1 punto) Encontrar $\nabla f(1, 2)$ y (si existe), la dirección de máximo crecimiento de f en $(1, 2)$.

- b) (1 punto) Sabiendo que $f(1, 2) = 0$, escribir explícitamente la ecuación del plano tangente a la superficie en \mathbb{R}^3 definida por $f(x, y) = z$ en el punto $(1, 2, 0)$.

Pregunta 2

1. **Verdadero o Falso.** Justifique en dos o tres líneas su respuesta.

- a) (0.5 puntos) La derivada de $f(x, y) = \sin^2 x$ en (x_0, y_0) es $f'(x_0, y_0) = 2 \sin x_0 \cos x_0$.

- b) (1 punto) No existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en \mathbb{R}^2 para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- c) (1 punto) Si $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces f no es diferenciable en $(x, y) = (0, 0)$.

2. Sea $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ fijo. Considere el sistema de ecuaciones no lineales en (x, y) de orden tres

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = u, \\ 3x^2y - y^3 = v. \end{cases} \quad (\text{S})$$

- a) (1.5 puntos) Muestre que, si para ciertos (u, v) fijos, un (x, y) **es solución** del sistema anterior, entonces

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) := T(x, y) := \frac{1}{2}(-x - \sqrt{3}y, x\sqrt{3} - y) \quad \text{y} \quad (\hat{x}, \hat{y}) := -\frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y, x\sqrt{3} + y),$$

también son soluciones del mismo sistema.

Indicación: Antes de probar que (\tilde{x}, \tilde{y}) es solución de (S), factorice las ecuaciones en (S). Para probar que (\hat{x}, \hat{y}) también es solución, puede serle útil probar antes que $(\hat{x}, \hat{y}) = T(\tilde{x}, \tilde{y})$.

- b) (1 punto) Probar que si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, y si $(u_0, v_0) := (x_0^3 - 3x_0y_0^2, 3x_0^2y_0 - y_0^3)$ entonces para cualquier (u, v) suficientemente cercano a (u_0, v_0) , el sistema (S) posee una única solución (x, y) cercana a (x_0, y_0) .

- c) (1 punto) Mostrar que si $t \neq 0$ es cualquier parámetro suficientemente pequeño, y si $(u, v) := t^3(1, 0)$, entonces el sistema (S) posee al menos tres soluciones explícitas, diferentes entre sí, todas cercanas al origen. ¿Es el Teorema de la Función Inversa aplicable en el origen?

Pregunta 3

1. En lo que sigue, supondremos que $s, t \in \mathbb{R}$ son variables de tiempo, y $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ son variables de espacio. Sea $f_0 = f_0(x)$ una función **escalar** dada, diferenciable en \mathbb{R}^3 .

Fijemos $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, y consideremos $f := f(t, x)$ una función escalar diferenciable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Supondremos que f satisface la “ecuación de transporte”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + v \cdot \nabla f(t, x) &= 0, \quad \text{para cada } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ f(t = 0, x) &= f_0(x), \end{aligned} \tag{T}$$

y donde $\nabla f(t, x)$ es el gradiente de f con respecto a la variable $x \in \mathbb{R}^3$, en el punto $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

- a) (2 puntos) Defina $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$g(s, y) := f(s, y + sv).$$

Probar que g es diferenciable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ y que para todo $s \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, y) = 0.$$

Indicación: Le puede ser útil escribir el árbol de dependencia de g precisando al comienzo cada una de las cuatro variables de f , es decir, $f = f(t, x_1, x_2, x_3)$.

- b) (1 punto) Usando el Teorema del Valor Medio sobre g en la variable s , deducir que para todo $s \in \mathbb{R}$, e $y \in \mathbb{R}^3$,

$$f(s, y + sv) = f_0(y).$$

- c) (0.5 puntos) Usando la parte anterior, concluir que la solución de (T) es

$$f(t, x) = f_0(x - vt).$$

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \int_{-\infty}^x e^{-s^2} ds.$$

- a) (0.5 puntos) Verificar que $f > 0$, y que f es diferenciable y creciente en \mathbb{R} .

- b) (0.5 puntos) Usando que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = 2 \int_{-\infty}^0 e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$, pruebe que $f(x) > x$ si $x < \varepsilon_0$, donde $\varepsilon_0 > 0$ es pequeño pero fijo.

- c) (0.5 puntos) Pruebe ahora que $f(x) < x$ si $x > \sqrt{\pi}$.

- d) (1 punto) Probar que la ecuación $x = f(x)$ posee una única solución en \mathbb{R} .