

## CONTROL 1 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2017

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO Y JOSÉ MANUEL PALACIOS  
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS  
TIEMPO: 3 HORAS

**Pregunta 1. Verdadero o Falso.** Justifique en dos o tres líneas su respuesta (1.5 puntos cada una).

- (a) Si  $x, y$  son cualquier par de puntos distintos en  $\mathbb{R}^d$ , entonces existen bolas cerradas y disjuntas que contienen a  $x$  e  $y$  respectivamente.
- (b) Existe una sucesión definida en la bola abierta  $B((0, 0, 0), \frac{1}{2})$  de  $\mathbb{R}^3$  que converge al Polo Sur  $(0, 0, -1)$ .
- (c) Si  $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ , entonces  $\text{Fr}A = A$ .
- (d) Si  $C$  es compacto en  $\mathbb{R}^p$ , y  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$  es continua, entonces  $f^{-1}(C)$  es compacto.

**Pregunta 2** (2 puntos cada una)

- 1. ¿Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ? Justifique su respuesta.
- 2. ¿Es posible definir  $f(x, y, z) := \frac{(2y, 3z, x)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  de tal manera que la nueva  $f$  sea continua en todo  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique su respuesta.
- 3. Muestre ahora que existe  $C > 0$  independiente de  $(x, y, z)$  tal que  $\frac{|x| + 2|y| + 3|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq C$  para todo  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

**Pregunta 3** (2 puntos cada una)

- 1. Sea  $(x_n)$  una sucesión en  $\mathbb{R}^d$  tal que  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  en  $\mathbb{R}$  y además  $x_n \cdot x \rightarrow \|x\|^2$  en  $\mathbb{R}$ . Mostrar que  $x_n \rightarrow x$  en  $\mathbb{R}^d$ .
- 2. Usando el Teorema de Punto Fijo, muestre que  $f(x) = e^{-x^2/4}$  posee un único punto fijo en  $\mathbb{R}$ . *Indicación.* Reducir el problema al intervalo  $[0, 1]$ .
- 3. Mostrar que si  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  es abierto y cerrado al mismo tiempo, entonces  $\text{Fr}A = \emptyset$ .