

## EXAMEN CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO E IAN LETTER

SIN CALCULADORAS, CELULARES NI APUNTES. TIEMPO: 3 HORAS

**Pregunta 1. Verdadero o Falso.** Justifique adecuadamente su respuesta (2 puntos cada una).

1.  $f''(x, y)$  es definida positiva sobre los mínimos globales de  $f(x, y) := (1 - x^2 - y^2)^2$ .
2. La función  $f(x, y, z) = x^4 - y + z^3$  posee gradiente no nulo en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que no posee ni máximos ni mínimos en ningún compacto de  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 < 4\}$  no tiene medida cero.

**Pregunta 2**

1. (3 ptos.) Calcule, para  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad \text{donde} \quad A_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

2. (3 ptos.) Calcule  $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ . Justifique cada uno de sus cálculos.

**Pregunta 3**

1. (3 ptos.) Grafique aproximadamente y calcule el área  $A_1$  del hiperboloide de una hoja dado por  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  con  $z \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Indicación:**  $\int \sqrt{a^2 + u^2} = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$ .

2. (3 ptos.) Grafique aproximadamente y calcule el volumen  $V_1$  encerrado entre el hiperboloide de dos hojas de ecuación  $-(x^2 + y^2) + z^2 = 1$  y los planos  $z = \pm 2$ .