

CONTROL 3 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO E IAN LETTER

SIN APUNTES, CALCULADORAS NI TELÉFONOS CELULARES. TIEMPO: 3 HORAS

Pregunta 1.

1. **Verdadero o Falso.** Justifique en tres o cuatro líneas su respuesta (2 puntos cada una).
 - (a) Si f es de clase C^2 en \mathbb{R}^d y $f''(x)$ es semidefinida negativa para cualquier $x \in \mathbb{R}^d$, entonces todo punto crítico de f es máximo global.
 - (b) Si A es acotado en \mathbb{R}^2 , entonces $B := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ tiene contenido cero.
2. (2 pts.) Considere el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas $(x, y, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$$(IF) \quad \begin{cases} x + y = a \sin\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right), \\ x - y = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right). \end{cases}$$

Notar que $(x, y, a) = (0, 0, a_0)$ es solución de (IF), para cualquier $a_0 > 0$. ¿Es posible despejar (x, y) en función de a , de manera C^1 para a cercana a a_0 , y con $x(a_0) = y(a_0) = 0$? ¿Es explícito este despeje? Justifique su respuesta.

Pregunta 2. Sea $c \in \mathbb{R}$. Considere el polinomio $p_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$p_c(x, y) = 1 + c(x^3 + y^3) + (x^2 + y^2)^2.$$

1. (3.5 pts.) Encuentre los valores de $c \neq 0$ para los cuales $p_c(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (2.5 pts.) Encuentre los valores de $c \neq 0$ para los cuales $p_c(x, y) > 1$ si ahora se satisface $x^2 + y^2 = c^2$.

Pregunta 3

1. (2 pts.) Calcule explícitamente la integral de $F(x, y) := \cos(y^7)$ sobre la región

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^{1/6} \leq y \leq 1\}.$$

2. Sea $a > 0$ fijo. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, considere las EDPs

$$(SG) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \sin(h(x, y)),$$

y

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2a \sin\left(\frac{f(x, y) - g(x, y)}{2}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{f(x, y) + g(x, y)}{2}\right), \end{cases}$$

donde $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Nuestro objetivo es encontrar una solución particular a (SG), usando de ayuda (B). Para ello,

- a) (2 pts.) Muestre que si f y g satisfacen (B) solamente, entonces cada una resuelve (SG).
- b) (2 pts.) Suponga ahora $g \equiv 0$ en (B). Encuentre f no idénticamente nula, de clase C^2 en \mathbb{R}^2 , que satisfaga (B) (y por ende (SG)).

Indicaciones: $\int \operatorname{cosec} u = -\ln(\operatorname{cosec} u + \cotan u) + C$ y $\frac{\sin u}{1 + \cos u} = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$.