

## CONTROL 2 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2017

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO Y JOSÉ MANUEL PALACIOS  
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS  
TIEMPO: 3 HORAS

### Pregunta 1

- (i) Sean  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  y  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Asuma que se cumplen las siguientes ecuaciones para ciertas  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continuas en todo  $\mathbb{R}^2$ :

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\varphi_1(t, x) + \varphi_2(t, x)}{2}\right) + a \sin\left(\frac{\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)}{2}\right), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\varphi_1(t, x) + \varphi_2(t, x)}{2}\right) - a \sin\left(\frac{\varphi_1(t, x) - \varphi_2(t, x)}{2}\right). \end{cases}$$

- a) (1 pto.) Muestre que si  $\varphi_2$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\varphi_1$  también lo es.  
b) (1.5 ptos.) Suponga nuevamente que  $\varphi_2$  en (B) es de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , y sea  $w := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$ . Argumente por qué existe y calcule  $D_w \varphi_1(t, x) + D_w \varphi_2(t, x)$  solamente en función de  $a$ ,  $\varphi_1(t, x)$  y  $\varphi_2(t, x)$ .  
(ii) (3.5 ptos.) Considere la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) := \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & y \neq 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

¿Es  $f$  diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ ? Argumente cuidadosamente su respuesta.

### Pregunta 2. Verdadero o Falso. Justifique en tres o cuatro líneas su respuesta (1.5 puntos cada una).

- (a)  $f(x, y) := |xy|$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .  
(b) Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , entonces  $D_v f(0, 0) = 0$  para toda  $v \in S((0, 0), 1)$ .  
(c) El plano tangente al hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  en el punto  $(0, 1, 0)$  es  $y = 1$ .  
(d) Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y tal que  $f(1, 1) = f(-1, -1)$ , entonces existe un punto  $(a, b)$  donde  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ .

### Pregunta 3 Suponga que $\varphi = \varphi(t, x)$ es una función de clase $C^2$ en $\mathbb{R}^2$ . Considere la EDP para $\varphi$

$$(SG) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) + \sin(\varphi(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) (3 pts.) Suponga que  $\varphi(t, x) = 4 \arctan \phi(t, x)$ , para cierta  $\phi(t, x)$ . Muestre que  $\phi$  debe satisfacer la nueva EDP

$$(SG4) \quad (1 + \phi^2) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - 2\phi \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \phi - \phi^3 = 0, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Indicación:  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ ,  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$ , y  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ .

- (ii) (1.5 ptos.) Sea  $v \in (-1, 1)$  fijo. Encuentre **una** solución particular para (SG4) de la forma  $\phi_p(t, x) = e^{\gamma(x-vt)}$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$  a encontrar. Argumente por qué es importante tomar  $v \in (-1, 1)$  solamente. Usando  $\phi_p$  y la parte anterior encuentre, para cada  $v \in (-1, 1)$ , una solución  $\varphi_{p,v}(t, x)$  de (SG).  
(iii) (1.5 ptos.) Muestre finalmente que  $\varphi_1 := \varphi_{p,v}$  y  $\varphi_2 := 0$  satisfacen **ambas ecuaciones** en (B) de la Pregunta 1, ítem (i), para un único  $a$  bien escogido (i.e., explícítelo).