

CONTROL 1 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO E IAN LETTER

TIEMPO: 3 HORAS

Pregunta 1. Verdadero o Falso. Justifique en dos o tres líneas su respuesta (1.5 puntos cada una).

- (a) Si A es cerrado y B es acotado, entonces $A \cap B$ es compacto.
- (b) $\text{Fr } \mathbb{R}^d = \emptyset$.
- (c) Existe al menos una sucesión $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ que satisface $x_n \rightarrow \bar{x}$ en \mathbb{R}^d pero $\|x_n - \bar{x}\|_{666} \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.
- (d) La sucesión $x_n = (\cos n, -\sin n)$ en \mathbb{R}^2 no posee subsucesión convergente.

Pregunta 2

- 1. (2 puntos) Muestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ no existe.
- 2. (2 puntos) Muestre ahora que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2016}} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ sí existe y calcúlelo.
- 3. (2 puntos) Encuentre el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4 y^4)}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq 0, \\ \lambda, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

sea continua en todo \mathbb{R}^2 . Justifique su respuesta.

Pregunta 3

- 1. (2 puntos) Probar que el conjunto $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) > \frac{1}{2}\}$ es abierto.
- 2. (2 puntos) Muestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, se tiene la desigualdad $|x \cdot y| \leq d\|x\|_\infty\|y\|_\infty$.
- 3. (2 puntos) Determine interior, adherencia y frontera del conjunto

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}.$$

Justifique claramente su respuesta.