

CONTROL 3 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. BRUNO AGUILÓ Y JAVIERA CASTILLO

TIEMPO: 2 HORAS 15 MINUTOS

Pregunta 1

1. **Verdadero o Falso.** Justifique en dos o tres líneas su respuesta.

a) (1.5 puntos) El polinomio de Taylor de orden siete, en torno al punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, de la función $f(x, y) = \cos(xy)$, viene dado por $P_7((0, 0), (h, k)) = 1 - \frac{1}{2}h^2k^2$.

b) (1.5 puntos) Existe una función f de clase C^3 en \mathbb{R}^3 que satisface

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0, 0) \neq \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(0, 0, 0).$$

2. Considere el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{cases} x^3(y^3 + z^3) = 0, \\ (x - y)^3 - z^2 = 7. \end{cases}$$

Notar que $A := (1, -1, 1)$ y $B := (0, (-7)^{1/3}, 0)$ son soluciones de este sistema no lineal.

a) (1.5 puntos) ¿Es posible despejar x y z como funciones de clase C^1 , dependientes de y , cerca del punto A ?

b) (1.5 puntos) ¿Es posible despejar y y z como funciones de clase C^1 , dependientes de x , cerca del punto B ?

Pregunta 2

1. Suponga que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f = f(t, x)$ es la altura de una cuerda que es solución de la ecuación de ondas en \mathbb{R}^2 , i.e. $f(t, x)$ satisface

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = 0,$$

para cualquier $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Defina, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(u, v) := f\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right).$$

a) (2 puntos) Mostrar que g es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 . Probar que g satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0, \quad \text{para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

b) (2 puntos) Usando la parte anterior, mostrar que existen funciones $h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cualquier $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, f está dada por la forma

$$f(t, x) = h(t+x) + k(x-t).$$

c) (2 puntos) Suponga ahora que la cuerda posee condiciones iniciales de posición $f(0, x) = f_0(x)$, y de velocidad $\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y donde f_0 es un perfil inicial de clase C^2 dado. Usando la parte anterior, mostrar que la evolución de la cuerda se descompone como dos “ondas” compuestas por la mitad del perfil f_0 , pero viajando en direcciones opuestas, es decir:

$$f(t, x) = \frac{1}{2}(f_0(x+t) + f_0(x-t)).$$