

CONTROL 1 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. BRUNO AGUILÓ Y JAVIERA CASTILLO

TIEMPO: 3 HORAS

Pregunta 1

1. Verdadero o Falso. Justifique en dos o tres líneas su respuesta (3 puntos, 1 punto cada una).

a) Si A es abierto y B es compacto, entonces $A \cap B$ es compacto.

b) La función $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$ alcanza su máximo en el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

c) Existe una sucesión de puntos $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$, $x_n \neq 0$ para todo n , y tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} = +\infty.$$

2. (3 puntos) Sea $\|\cdot\|$ la norma Euclideana en \mathbb{R}^d . Demuestre la identidad del paralelogramo:

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2).$$

Muestre que esta identidad es falsa en \mathbb{R}^2 si se reemplaza la norma Euclideana por la norma 1. Para ello, utilice dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$ escogidos apropiadamente.

Pregunta 2

1. (3 puntos) Sea $f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, definida para $(x, y) \neq (0, 0)$. Sea también $m \in \mathbb{R}$ fijo. Calcule el límite en \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx).$$

¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

2. (3 puntos) Sea f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

¿Es f continua en \mathbb{R}^2 ? Justifique bien su respuesta.

Pregunta 3

1. (2 puntos) Se sabe que la adherencia de un conjunto A (denotada $\text{Adh } A$), es el conjunto de puntos x en \mathbb{R}^d para los cuales existe una sucesión (x_n) , definida en A , y que converge a x . Suponga $A \subseteq \mathbb{R}^d$ cerrado. Pruebe que $\text{Adh } A = A$.

2. (2 puntos) Pruebe que el conjunto de ceros de un polinomio en \mathbb{R}^d es cerrado.

3. (2 puntos) Sea $f(x, y, z) := xyz$ definida en \mathbb{R}^3 . Pruebe que el conjunto de puntos (x, y, z) en \mathbb{R}^3 tales que $|f(x, y, z)| < 1$ es abierto.