

TAREA NUMÉRICA CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO Y JOSÉ MANUEL PALACIOS
FECHA LÍMITE DE ENTREGA: JUEVES 15 DE JUNIO A MEDIANOCHE.

Observaciones importantes. Esta tarea corresponde a una pregunta del Control 3. Puede ser resuelta en conjunto con otras personas, pero el informe final debe ser escrito de forma independiente, como así también las ideas expresadas. Puede programar sus códigos ya sea en Matlab, Maple, Mathematica u otro lenguaje, dependiendo de sus preferencias y las de los ayudantes. Se debe entregar el código personal utilizado y un informe en pdf explicando en detalle cada uno de los pasos más abajo pedidos. Para eximirse, es necesario haber hecho esta tarea.

La ecuación de Sine-Gordon. Para $t, x \in \mathbb{R}$, se desea entender algunas soluciones de la ecuación en derivadas parciales (EDP) no lineal de Sine-Gordon (SG):

$$(SG) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \sin(u(t, x)) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} := \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right).$$

Aquí asumimos que $u = u(t, x)$ es una función escalar de clase C^2 en $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Para (SG), se le pide resolver (algebraica o numéricamente) y detallar lo más que pueda las siguientes interrogantes. Puede utilizar gráficos, tablas, esquemas, figuras, etc. Afirmaciones y/o conclusiones deben estar soportados por evidencia clara. **Para encontrar raíces de ecuaciones, basta tomar una tolerancia máxima de 10^{-8} en el error numérico.**

La ecuación (SG) posee una clase de soluciones muy particulares, conocida como *respiradores*. Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Para $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, se definen las funciones

$$B_0(t, x) := 4 \arctan \left(\frac{\beta \cos(\alpha t)}{\alpha \cosh(\beta x)} \right),$$

y para $v \in (-1, 1)$ dado,

$$B_v(t, x) := B_0(\gamma(t - vx), \gamma(x - vt)), \quad \gamma := 1/\sqrt{1 - v^2}.$$

Parte 1. Grafique B_0 para los valores $\beta = 1/2$ y $\beta = 0.1$ para $(t, x) \in [-30, 30]^2$, y similar para B_v con $\beta = 1/2$ y $v = 0.4$ y $v = 0.9$. Describa el efecto del parámetro v . Grafique también los conjuntos de nivel $N_0(B_0)$ y $N_1(B_0)$ si $\beta = 1/2$. Describa lo que observa y explique por qué, si t es una variable de tiempo, estas soluciones se conocen como “respiradores”.

Parte 2. ¿Es B_0 de clase C^2 en \mathbb{R}^2 ? Justifique su respuesta.

- (a) Calcule el gradiente de B_0 para cada (t, x) . Encuentre los puntos críticos de B_0 (si existen). Si es necesario, puede ayudarse de un método numérico para encontrar tales puntos.
- (b) Calcule con un programa de computador las segundas derivadas parciales de B_0 y describa el carácter de cada punto crítico anteriormente encontrado.

Parte 3.

- (c) Usando las funciones encontradas en la parte anterior, concluya numéricamente que para cualquier $\beta \in (0, 1)$ se tiene que $u = B_0$ satisface (SG). (Aquí también es válido tomar un conjunto de 10 tríos (β, t, x) al azar y verificar con un error de 10^{-10} (a lo más) que se cumple la ecuación.)
- (d) Apoyándose en el resultado anterior (i.e. asúmalo) utilice ahora la regla de la cadena o un método numérico para mostrar que también $u = B_v$ es solución de (SG) para cualquier $v \in (-1, 1)$. Aquí puede preceder teórica o numéricamente, justificando sus resultados.

Parte 4.

- (e) Asuma ahora que $\beta = 1/2$. Usando un algoritmo numérico de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, encuentre el punto fijo de $x \mapsto B_0(t, x)$ para $t = 0$ y $t = 3$ con un error a lo más 10^{-8} . Compare su resultado con el arrojado por el método Solve/nsolve/NSolve de su programa computacional preferido.