

EXAMEN CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2017

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JAVIERA CASTILLO Y JOSÉ MANUEL PALACIOS
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS
TIEMPO: 3 HORAS

Observación: cada ítem abajo vale 3 ptos.

Pregunta 1

- (a) Sea $f(x, y) := (1 - x^2 - y^2)^2$, definida para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la función “sombrero mexicano”. Calcule el volumen finito encerrado por el plano $z = 1$ y f .
- (b) Utilice un cambio de variables apropiado para calcular la integral

$$\int_A z^2 dx dy dz$$

donde A es el elipsoide dado por

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Pregunta 2

- (a) Calcule el área del paraboloide $x = y^2 + z^2$ entre los planos $x = 0$ y $x = 1$.
- (b) Calcule el área de la helicoides $(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ para $0 \leq r \leq 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Indicación: $\int (a^2 + r^2)^{1/2} = \frac{1}{2} r \sqrt{a^2 + r^2} + \frac{1}{2} a^2 \log(\sqrt{a^2 + r^2} + r)$.

Pregunta 3. Verdadero o Falso. Justifique adecuadamente su respuesta.

- (a) Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi = \phi(s)$ es cualquier función de clase $C^2(\mathbb{R})$, entonces para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ las funciones $u_{\pm}(t, x) := \phi(x \pm t)$ resuelven la ecuación de Born-Infeld:

$$\left(1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

- (b) Dada un área fija positiva, el cilindro recto (contando las tapas verticales) que encierra el mayor volumen es aquel donde el radio y la altura están en relación 1 : 2.