PAUTA CONTROL 2 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2018

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JOSÉ MANUEL PALACIOS Y CATALINA PESCE
AYUDANTES: LEOPOLDO CÁRDENAS, JESSICA ESPINOZA, Y VALENTÍN RETAMAL
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS
TIEMPO: 2.5 HORAS

Pregunta 1 (2 puntos cada una) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0),\\ (x^2+y^2)\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

1. Calcular, si existen, las derivadas direccionales de f en el origen.

   Solución. Por definición, sea $v=(v_1,v_2)$ tal que $v_1^2+v_2^2=1$. Entonces

   $$D_vf(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(tv_1,tv_2)-f(0,0))=\lim_{t\to 0}t(v_1^2+v_2^2)\arctan\left(\frac{1}{|t|\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\right)$$
   $$=\lim_{t\to 0}t\arctan\left(\frac{1}{|t|}\right)=0,$$

   pues $\arctan$ es acotada. Luego, $D_vf(0,0)=0$.

2. ¿Es f de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?

   Solución. Si. La razón es que f posee derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$. En efecto, basta verificar el caso $(0,0)$, pues veremos fácilmente que las derivadas parciales son continuas fuera de este punto. De la parte anterior se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Por otro lado, si $(x,y)\neq(0,0)$, usando regla de la cadena obtenemos

   $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=&2x\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{(x^2+y^2)}{1+\frac{1}{x^2+y^2}}\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{3/2}}\\ =&2x\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x(x^2+y^2)^{1/2}}{1+x^2+y^2}.\end{aligned}$$

   Por simetría, es fácil ver que

   $$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{y(x^2+y^2)^{1/2}}{1+x^2+y^2}.$$

   Ahora procedemos a acotar ambas derivadas parciales. Claramente basta con hacerlo con una, la otra es idéntica. Como $|\arctan|\leq\frac{\pi}{2}$, tenemos de la desigualdad triangular y de la desigualdad $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leq\pi|x|+\frac{|x|(x^2+y^2)^{1/2}}{1+x^2+y^2}\leq\pi|x|+\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2},$$

   lo que claramente converge a 0 si (x,y) tienden a $(0,0)$. Esto prueba que las derivadas parciales de f son continuas en el origen (y claramente fuera de él), de donde f es C^1.

3. ¿Es f diferenciable en $\mathbb{R}^2$?

   Solución. Si. De la parte anterior, tenemos que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, por lo que es trivialmente diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta 2. Verdadero o Falso. Justifique en dos o tres líneas su respuesta (2 puntos cada una).

1. Si Π es un plano de ecuación $n_0 \cdot (x - x_0) = 0$, con $n_0 \neq 0$, entonces Π es hipersuperficie suave y cada punto de Π posee a Π como plano tangente.

   Verdadero. Π es representada por $\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ f(x) = 0\}$, donde $f(x) := n_0 \cdot (x - x_0)$. Tenemos $\nabla f(x) = n_0 \neq 0$, por lo que Π es hipersuperficie suave. De acuerdo a lo visto en clases, el plano tangente a un punto $x_1 \in \Pi$ está dado por la ecuación

   $$\nabla f(x_1) \cdot (x - x_1) = 0 \iff n_0 \cdot (x - x_1) = 0.$$

   Pero como $x_1 \in \Pi$ tenemos $n_0 \cdot (x_1 - x_0) = 0$, por lo que $0 = n_0 \cdot (x - x_1) = n_0 \cdot (x - x_0 + x_0 - x_1) = n_0 \cdot (x - x_0)$, que es lo que se pedía probar.

2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $(-1, 2)$ con $\nabla f(-1, 2) = (0, 1)^T$, entonces $|D_v f(-1, 2)| \leq 1$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ de norma uno.

   Verdadero. Basta notar que usando Cauchy-Schwarz y un teorema visto en clases,

   $$|D_v f(-1, 2)| = |\nabla f(-1, 2) \cdot v| \leq \|(0, 1)\| \|v\| = 1.$$

3. Toda bola cerrada es convexa, no importando la norma que se escoja.

   Verdadero. Sea $\overline{B}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \|x - x_0\|_g \leq r\}$ una bola cerrada con la norma $\| \cdot \|_g$. Entonces, si $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, se tiene $\|x_1 - x_0\|_g \leq r$ y $\|x_2 - x_0\|_g \leq r$. Sea $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, con $\lambda \in [0, 1]$. Entonces

   $$\|z - x_0\|_g = \|\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - x_0\|_g = \|\lambda (x_1 - x_0) + (1 - \lambda)(x_2 - x_0)\|_g.$$

   Usando desigualdad triangular, $\|\lambda (x_1 - x_0) + (1 - \lambda)(x_2 - x_0)\|_g \leq \lambda \|(x_1 - x_0)\|_g + (1 - \lambda)\|x_2 - x_0\|_g \leq \lambda r + (1 - \lambda) r = r$. Esto prueba que $\overline{B}(x_0, r)$ es convexa.

Pregunta 3 (3 ptos. cada una)

1. Probar que la ecuación $x = \cos(\cos x)$ posee una única solución en $\mathbb{R}$. *Indicación:* Primero muestre por qué basta buscar la solución en un intervalo de la forma $[-a, a]$ en $\mathbb{R}$.

   Solución. Como $\cos \in [-1, 1]$, un punto fijo de $f(x) := \cos(\cos x)$ (si existe) no puede estar más allá de 1 en módulo. Luego, busquemos este punto fijo en $[-1, 1]$.

   Claramente f es continua en este intervalo, y si $x \in [-1, 1]$, $|f(x)| \in [-1, 1]$. En efecto,
$$|f(x)| = |\cos(\cos x)| \leq 1.$$
   Finalmente, verifiquemos que f es contractante. Para ello, notemos que gracias a TVM, si $x, y \in [-1, 1]$,
$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|,$$
   para cierto $\xi \in (-1, 1)$. Pero $f'(\xi) = \sin(\cos\xi)\sin\xi$, de donde $|f'(\xi)| \leq |\sin\xi| < 1$, pues ξ nunca es $\pm\frac{\pi}{2}$. Esto prueba que f es contractante, y por ende posee un único punto fijo en $[-1, 1]$, y por ende en $\mathbb{R}$.

2. Sea $f = f(x, y, z)$ una función escalar, de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Calcule y reduzca al máximo posible todas las derivadas parciales de $f(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))$.

   Solución. Llamemos (u, v, w) las variables de f. Sea
$$h(x, y, z) := f(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x)).$$
   Tenemos entonces
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = &\frac{\partial f}{\partial u}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial v}(z, x, y)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial w}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial w}(y, z, x).\end{aligned}$$
   Asimismo,
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = &\frac{\partial f}{\partial u}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial w}(z, x, y)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial w}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial u}(y, z, x).\end{aligned}$$
   Finalmente
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = &\frac{\partial f}{\partial u}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial v}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial u}(z, x, y)\\ &+ \frac{\partial f}{\partial w}(f(x, y, z), f(z, x, y), f(y, z, x))\frac{\partial f}{\partial v}(y, z, x).\end{aligned}$$