PAUTA CONTROL 3 CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES OTOÑO 2018

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JOSÉ MANUEL PALACIOS Y CATALINA PESCE
AYUDANTES: LEOPOLDO CÁRDENAS, JESSICA ESPINOZA, Y VALENTÍN RETAMAL
SIN APUNTES, CELULARES NI CALCULADORAS
TIEMPO: 2 HORAS 15 MINS.

La ecuación de Sine-Gordon y su "respirador". Suponga que $\varphi = \varphi(t,x)$ es una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$. Considere la EDP para φ

$$\text{(SG)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) + \sin(\varphi(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Esta ecuación aparece en un área de las Matemáticas llamada Geometría Diferencial, como así también en varias aplicaciones físicas, como dislocaciones de cristales.

Sean $\alpha, \beta > 0$ fijos y tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Para cada $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, el *respirador* de SG se define como la función

$$\varphi_B(t,x) := 4 \arctan \phi_B(t,x); \qquad \phi_B(t,x) := \frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}.$$

Pregunta 1 (3 puntos cada una)

(i) Suponga que $\varphi(t,x) = 4\arctan \phi(t,x)$, para cierta $\phi(t,x)$. Muestre que ϕ debe satisfacer la nueva EDP

$$\text{(SG4)} \quad (1+\phi^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) - 2\phi\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] + \phi - \phi^3 = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Indicación: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, y $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Solución. Aquí tenemos $\varphi(t,x) = h(\phi(t,x))$, donde $h = h(s) := 4\arctan s$, con $h'(s) = \frac{4}{1+s^2}$. Por ende,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial s}(\phi(t,x))\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) = h'(\phi(t,x))\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) = \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial s}(\phi(t,x))\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x) = h'(\phi(t,x))\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x) = \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x).$$

Para calcular las segundas derivadas parciales, procedemos aplicando primero la regla del producto a las derivadas parciales calculadas anteriormente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x) + \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(t,x)\\ &= \frac{-8\phi(t,x)}{(1+\phi^2(t,x))^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\Big)^2 + \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(t,x).\end{aligned} \tag{0.1}$$

Por simetría, se tiene también que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\Big)\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x) + \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,x)\\ &= \frac{-8\phi(t,x)}{(1+\phi^2(t,x))^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x)\Big)^2 + \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,x).\end{aligned} \tag{0.2}$$

Nota: 1.5 pts. hasta aquí.

Finalmente, si $\theta(t,x) := \arctan \phi(t,x)$, usando las indicaciones,

$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \sin(4\theta)\\ &= 2\sin(2\theta)\cos(2\theta)\\ &= 4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)\\ &= 4\tan\theta\cos^2\theta(2\cos^2\theta-1).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= 4\frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\Big(\frac{2}{\sec^2\theta} - 1\Big)\\ &= 4\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\Big(\frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1\Big)\\ &= 4\frac{\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^2}.\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de θ, tendremos

$$\sin(\varphi(t,x)) = 4\frac{\phi(t,x)(1-\phi^2(t,x))}{(1+\phi^2(t,x))^2}.$$

Por lo tanto, recopilando (0.1), (0.2) y la identidad anterior, tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) + \sin(\varphi(t,x))\\ &= \frac{-8\phi(t,x)}{(1+\phi^2(t,x))^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\Big)^2 + \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(t,x)\\ &\quad + \frac{8\phi(t,x)}{(1+\phi^2(t,x))^2}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}(t,x)\Big)^2 - \frac{4}{1+\phi^2(t,x)}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,x) + 4\frac{\phi(t,x)(1-\phi^2(t,x))}{(1+\phi^2(t,x))^2}.\end{aligned}$$

Multiplicando por $(1+\phi^2(t,x))^2$ y dividiendo por 4, obtenemos finalmente (SG4), válida para cada $(t,x)\in\mathbb{R}^2$.

(ii) Muestre que ϕ_B es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y que resuelve (SG4) (y por ende, φ_B resuelve (SG)).

Indicación: $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$.

Solución. Calculamos:

$$\frac{\partial\phi_B}{\partial t}(t,x) = -\beta\frac{\sin(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}, \qquad \Big(\frac{\partial\phi_B}{\partial t}(t,x)\Big)^2 = \beta^2\frac{\sin^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)};$$

$$\frac{\partial^2\phi_B}{\partial t^2}(t,x) = -\alpha\beta\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)},$$

$$\frac{\partial\phi_B}{\partial x}(t,x) = -\frac{\beta^2}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)}, \qquad \Big(\frac{\partial\phi_B}{\partial x}(t,x)\Big)^2 = \frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)\sinh^2(\beta x)}{\cosh^4(\beta x)}.$$

$$\frac{\partial^2\phi_B}{\partial x^2}(t,x) = \frac{2\beta^3}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh^2(\beta x)}{\cosh^3(\beta x)} - \frac{\beta^3}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}.$$

Tenemos (usando que $\alpha^2+\beta^2=1$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi_B}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\phi_B}{\partial x^2}(t,x) &= (\beta^2-\alpha^2)\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)} - \frac{2\beta^3}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh^2(\beta x)}{\cosh^3(\beta x)}\\ &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(\beta^2-\alpha^2-2\beta^2\frac{\sinh^2(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)}\right)\\ &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(-1+\frac{2\beta^2}{\cosh^2(\beta x)}\right).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$1+\phi_B^2(t,x) = 1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&(1+\phi_B^2(t,x))\left(\frac{\partial^2\phi_B}{\partial t^2}(t,x)-\frac{\partial^2\phi_B}{\partial x^2}(t,x)\right)\\
&=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(-1+\frac{2\beta^2}{\cosh^2(\beta x)}\right)\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}\right)\\
&=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(-1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}+\frac{2\beta^2}{\cosh^2(\beta x)}+\frac{2\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^4(\beta x)}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&-2\phi_B\left(\left(\frac{\partial\phi_B}{\partial t}(t,x)\right)^2-\left(\frac{\partial\phi_B}{\partial x}(t,x)\right)^2\right)\\
&\quad= -2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(\beta^2\frac{\sin^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}-\frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)\sinh^2(\beta x)}{\cosh^4(\beta x)}\right)\\
&\quad= -2\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(\beta^2\frac{\sin^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}-\frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}+\frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^4(\beta x)}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\phi_B(t,x)-\phi_B^3(t,x)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}\right).$$

Por lo tanto, sumando,

$$\begin{aligned}
&(1+\phi_B^2(t,x))\left(\frac{\partial^2\phi_B}{\partial t^2}(t,x)-\frac{\partial^2\phi_B}{\partial x^2}(t,x)\right)-2\phi_B\left(\left(\frac{\partial\phi_B}{\partial t}(t,x)\right)^2-\left(\frac{\partial\phi_B}{\partial x}(t,x)\right)^2\right)+\phi_B(t,x)-\phi_B^3(t,x)\\
&=\frac{\beta}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\left(-1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}+\frac{2\beta^2}{\cosh^2(\beta x)}+\frac{2\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^4(\beta x)}\right.\\
&\qquad\left.-2\beta^2\frac{\sin^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}+2\frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}-2\frac{\beta^4}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^4(\beta x)}+1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\cos^2(\alpha t)}{\cosh^2(\beta x)}\right)\\
&=\frac{\beta^3}{\alpha^3}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh^3(\beta x)}\big(-\cos^2(\alpha t)+2\alpha^2-2\alpha^2\sin^2(\alpha t)+2\beta^2\cos^2(\alpha t)-\cos^2(\alpha t)\big)=0.
\end{aligned}$$

Pregunta 2 (2 puntos cada una)

(i) Encuentre los puntos críticos de ϕ_B, indicando su naturaleza (máximos y mínimos locales, o punto silla) y valor de ϕ_B en tales puntos. Discuta si existen máximos o mínimos globales.

Solución. Tenemos, de la parte anterior,

$$\nabla\phi_B(t,x) = \left(\frac{\partial\phi_B}{\partial t}(t,x), \frac{\partial\phi_B}{\partial x}(t,x)\right)^T = \left(-\beta\frac{\sin(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}, -\frac{\beta^2}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)}\right)^T.$$

Luego, los puntos críticos satisfacen

$$\sin(\alpha t) = 0, \quad \cos(\alpha t)\sinh(\beta x) = 0.$$

La primera ecuación nos da

$$t_k = k\frac{\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y la segunda $x = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos vienen dados por

$$P_k = \left(k\frac{\pi}{\alpha}, 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La matriz Hessiana viene dada por

$$\begin{aligned}\phi_B''(t,x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi_B}{\partial t^2}(t,x) & \frac{\partial^2\phi_B}{\partial x\partial t}(t,x) \\ \frac{\partial^2\phi_B}{\partial t\partial x}(t,x) & \frac{\partial^2\phi_B}{\partial x^2}(t,x)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha\beta\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)} & \beta^2\frac{\sin(\alpha t)\sinh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)} \\ \beta^2\frac{\sin(\alpha t)\sinh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)} & \frac{2\beta^3}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh^2(\beta x)}{\cosh^3(\beta x)} - \frac{\beta^3}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

(hemos usado la parte anterior y el Lema de Schwartz). Luego,

$$\phi_B''(P_k) = \begin{pmatrix} -\alpha\beta(-1)^k & 0 \\ 0 & -\frac{\beta^3}{\alpha}(-1)^k\end{pmatrix}.$$

Luego, para $2k$ (par) tenemos $\phi_B''(P_{2k})$ definida negativa y $P_{2k} = \left(2k\frac{\pi}{\alpha}, 0\right)$ corresponde a máximo local, con valor $\phi_B(P_{2k}) = \frac{\beta}{\alpha}$.

Notar que este corresponde a máximo global pues $\phi_B(t,x) \le \frac{\beta}{\alpha}$ para cualquier $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, para el caso $2k+1$ (impar) tenemos $\phi_B''(P_{2k+1})$ definida positiva y $P_{2k+1} = \left((2k+1)\frac{\pi}{\alpha}, 0\right)$ corresponde a mínimo local, con valor $\phi_B(P_{2k+1}) = -\frac{\beta}{\alpha}$, que es mínimo global por la misma razón de antes.

(ii) Encuentre (si existen) los valores máximo y mínimo de ϕ_B sobre el conjunto de (t,x) en $\left[\frac{\pi}{4\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right] \times \mathbb{R}$.

Solución. Si trabajamos en el conjunto abierto $\left(\frac{\pi}{4\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right) \times \mathbb{R}$, de la parte anterior sabemos que no existen puntos críticos. Por lo tanto, nos concentraremos en los bordes:

$$t = \frac{\pi}{4\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{y} \qquad t = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aquí, hay dos opciones para proseguir: o bien usar multiplicadores de Lagrange, o bien reemplazar en ϕ_B los valores de $t = \frac{\pi}{4\alpha}$ y $t = \frac{\pi}{2\alpha}$. Aquí seguiremos una mezcla de ambas.

Caso $t = \frac{\pi}{4\alpha}$ y Lagrange. La función de restricción es $g_a(t,x) = t - \frac{\pi}{4\alpha}$. Utilizando multiplicadores de Lagrange,

$$\nabla\phi_B(t,x) = \lambda\nabla g_a(t,x) \implies \left(-\beta\frac{\sin(\alpha t)}{\cosh(\beta x)}, -\frac{\beta^2}{\alpha}\frac{\cos(\alpha t)\sinh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)}\right) = \lambda(1,0).$$

Como $t - \frac{\pi}{4\alpha} = 0$, necesariamente $x = 0$ y $-\beta\sin(\pi/4) = \lambda$. Luego, $P_a = (\frac{\pi}{4\alpha}, 0)$ es un punto factible, donde $\phi_B(P_a) = \frac{\beta}{\sqrt{2}\alpha} > 0$.

Caso $t = \frac{\pi}{2\alpha}$ y reemplazo. Aquí es mejor reemplazar, pues para este caso ϕ_B es idénticamente cero. Luego, toda la recta $x \in \mathbb{R}$ es mínimo.

Por otro lado, P_a arriba es máximo.

(iii) Sea $L > 0$ una constante. ¿Es ϕ_B integrable sobre el rectángulo (en variables $(t,x) \in \mathbb{R}^2$) dado por $R_L := \left[0, \frac{\pi}{\alpha}\right] \times [-L, L]$? (Justifique su respuesta.) Calcule

$$\int_{[0,\frac{\pi}{\alpha}]\times\mathbb{R}} \phi_B^3 := \lim_{L\to+\infty} \int_{R_L} \phi_B^3.$$

Solución. Tenemos que ϕ_B es integrable por ser continua en R_L. Por otro lado, usando Fubini,

$$\int_{R_L} \phi_B^3 = \int_{-L}^{L}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\beta^3}{\alpha^3}\frac{\cos^3(\alpha t)}{\cosh^3(\beta x)}dt\,dx = \frac{\beta^3}{\alpha^3}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\cosh^3(\beta x)}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos^3(\alpha t)dt\right)dx.$$

Pero por periodicidad, la integral en t es cero. En efecto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^3(\alpha t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi}\cos^3 t\,dt = \frac{1}{8\alpha}\int_0^{\pi}(e^{it} + e^{-it})^3 dt,$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^3(\alpha t)dt &= \frac{1}{8\alpha}\int_0^{\pi}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it})dt \\
&= \frac{1}{8\alpha}\left(\frac{e^{3it}}{3i} + \frac{3}{i}e^{it} + \frac{3}{-i}e^{-it} + \frac{e^{-3it}}{-3i}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{8\alpha}\left(\frac{-1}{3i} - \frac{3}{i} - \frac{3}{-i} - \frac{1}{-3i} - \frac{1}{3i} - \frac{3}{i} - \frac{3}{-i} - \frac{1}{-3i}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_{R_L}\phi_B^3 = 0$ y luego $\int_{[0,\frac{\pi}{\alpha}]\times\mathbb{R}}\phi_B^3 = 0$.