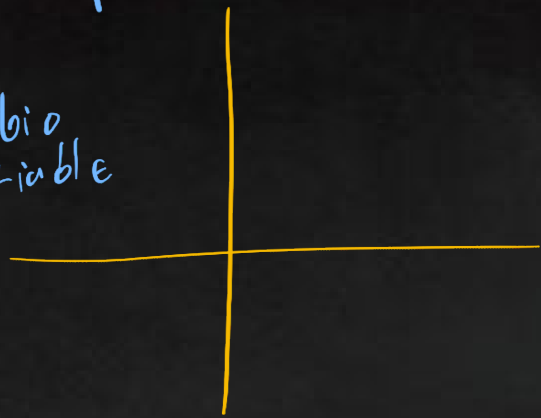
fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\mathbb{R}^2$ Cartesianas $\longrightarrow$ polares (r, θ)

Cambio Variable



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 \iff$$

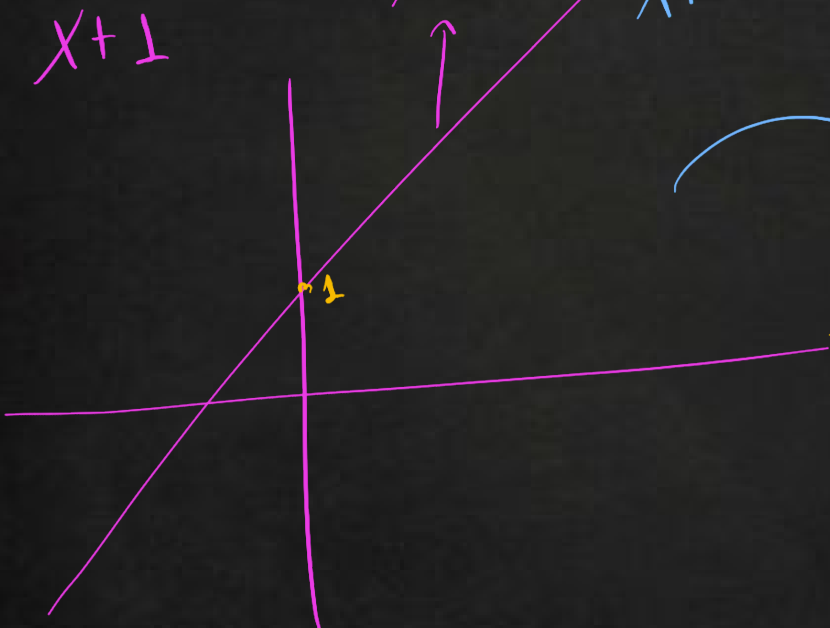
C.V $u = x+1$, $x \to +\infty$, $u \to +\infty$

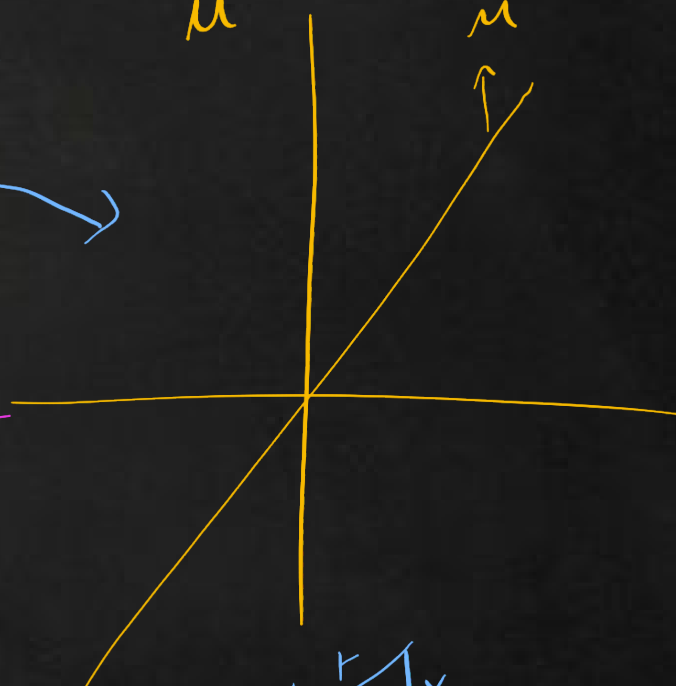
$$= \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$$

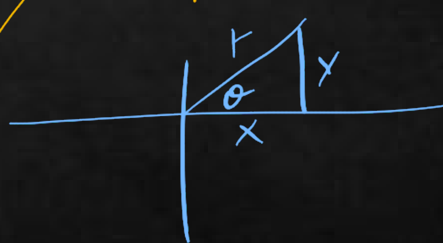
Plano 1 $\qquad$ Plano 2

$x+1$

$x+1$ $\qquad$ $x+1 = u$ $\qquad$ u







Cartesian

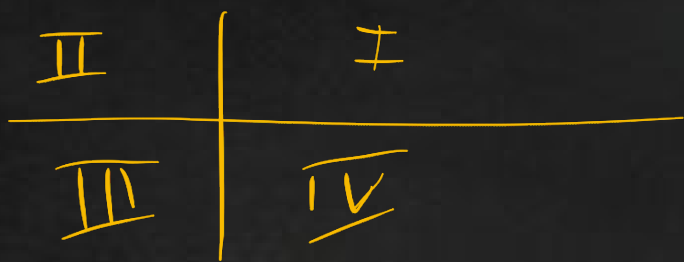
$(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$

$x = r\cos(\theta)$ $\qquad$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\,sen(\theta)$

$\theta \in (-\pi, \pi]$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x<0,\ y<0 \quad \text{III} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0 \quad \text{I, IV} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x<0,\ y \geq 0 \quad \text{II} \end{cases}$$

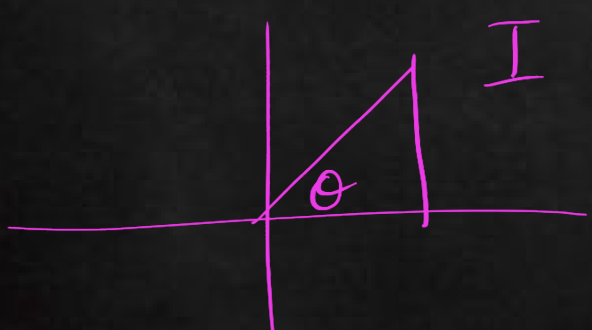


$r \in (0, +\infty)$, $r \neq 0$

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\cancel{r}\sin(\theta)}{\cancel{r}\cos(\theta)} = tg(\theta)$

$\frac{y}{x} = tg(\theta) \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \theta$ //

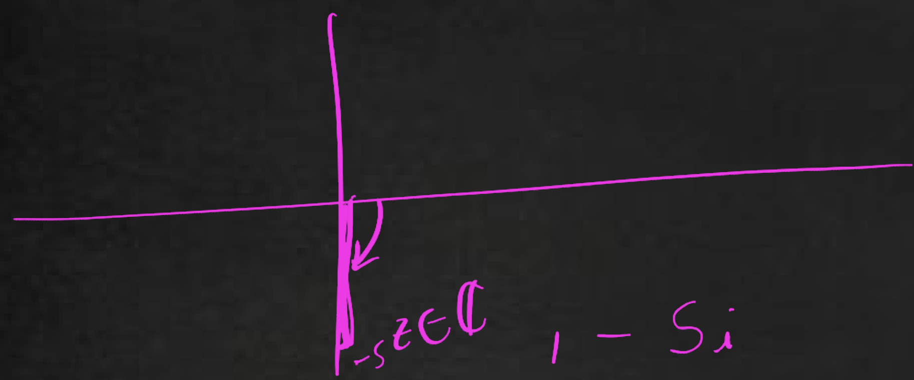


Para obtener θ en el intervalo [0, 2π), se deben usar las siguientes fórmulas ($\arctan$ denota la inversa de la función tangente):

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

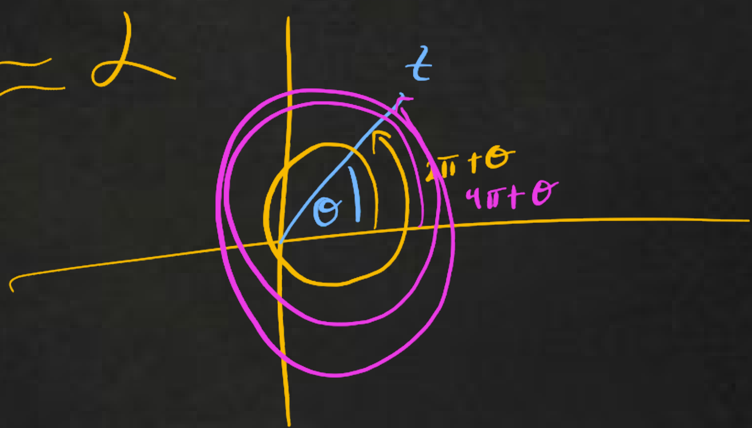
Para obtener θ en el intervalo $(-\pi, \pi]$, se considera que $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es una función creciente en su dominio:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \end{cases}$$



argumento ¿

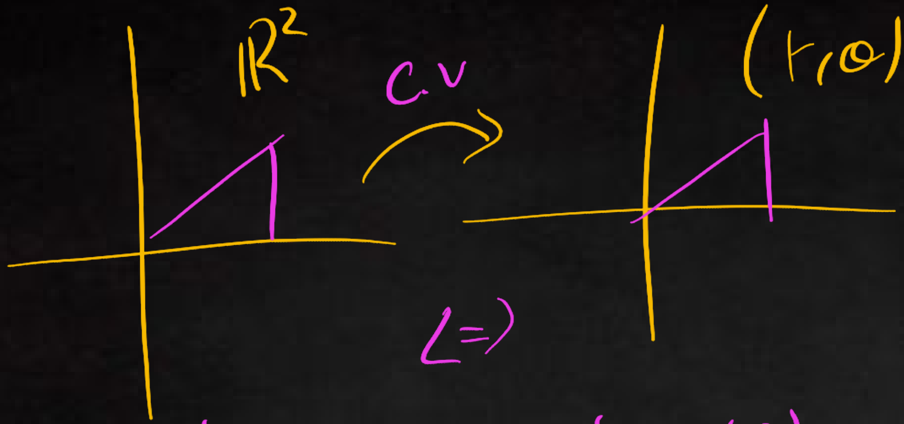
$\arg(z) = \alpha$



$\frac{\theta}{2\pi} \to$ resto

$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = 1 + \frac{\pi}{2\pi}$

arg



$\# \; e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$

$z \in \mathbb{C}$

$z = \underbrace{a+bi}_{\text{cartesiana}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{Polar}}$ problema

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1 + z_2 \to$ Cartesiana ✓

$z_1 \cdot z_2 \to$ polar ✓

$z_1^6 \to$ polares ✓

$\| \quad (a+bi)^6 \to (re^{i\theta})^6$

$z_1/z_2 \to$ polares ✓

Considere

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 1 + i$

i) Escriba complejo

$w = \frac{z_1}{z_2}$

$z = a + bi$

$\overline{z} = a - bi$

Cuando tengo complejo en el denominador y divido / para sacarlo multiplico por el conjugado

$\boxed{i^2 = -1}$

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i\sqrt{3})}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)}$$

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3} - i - i^2\sqrt{3})}{1^2 - i^2} = \frac{1 + i(\sqrt{3}-1) + \sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{2} \in \mathbb{C}$$

\# otra forma

Usando propiedad del inverso $i^2 = -1$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(a+bi)}\frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$; $a = 1$, $b = 1$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = (1+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) //$$

ii) Escribe $z_1/z_2 = w$ en forma polar

1) z_1 polar
2) z_2 polar
$\Rightarrow$ 3) $\frac{z_1}{z_2}$ polar

1) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $a = 1$ $b = \sqrt{3}$, $a>0$, $b>0$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2 //$

Deducirla.

I

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
S	0	1	2	3	4
C	4	3	2	1	0

2

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X

$r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = z_1$

2) $z_2 = 1 + i$, $a = 1$, $b = 1$, $a>0$ $b>0$ I

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = z_2$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\, e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\cancel{2}}$$

$$= \sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

iii) Calcula $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Usaremos parte i y ii)

ii) i)

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} i$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} i \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$$\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right)}_{\mathbb{R}} + i\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)}_{\mathbb{I}} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}_{\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}}_{\mathbb{I}} i$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \wedge \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

otra forma $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos(x) = \cos(-x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$
$-\sin(x) = \sin(-x)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
S	0	1	2	3	4
C	4	3	2	1	0

$\sqrt{}$ / 2

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

$$\boxed{= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

PDQ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$i = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i = \overset{-1}{i^2}\, i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i$

$\frac{723}{4} = \frac{\overset{180}{720}}{4} + \frac{3}{4}$

$i^{723} = -i$

$i^{129} = i^{1}$

$129 \,/\, 4$

$42 + \frac{1}{4}$

$S \to C \to -S \to -C \to S$

$\leftarrow \frac{\text{Ciclo } 4}{\text{Bad Bunny}} \to$

$i \to i^2 = -1 \to i^3 = -i \to i^4 = 1 \to i$

$$i^{17} = i^{16} \cdot i$$

$$(i^4)^4 \cdot i$$

$$1^4 \cdot i$$

$$1 \cdot i = i^{1}$$

Recreo y de vuelta Anillo complejo

20 : 32

Considere el subconjunto H de los números complejos por $H = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, $H \subseteq \mathbb{C}$

Denotamos $+$ $\cdot$ habitual $(H, +, \cdot)$

Se sabe que $(H, +, \cdot)$ anillo conmutativo.

i) Demuestra que $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de 0.

Qué es un divisor de 0 $\Leftrightarrow$ Si A, tiene divisor de cero existen $x, y \in A$ tal que $x, y \neq 0$ $\wedge$ $x \cdot y = 0$

Procedemos por contradicción

$\Rightarrow$) Supongo que $(H,+,\cdot)$ tiene divisor de cero $\overset{def}{\Rightarrow}$ Existen $z,w \in H$ tal que $H=\{a+bi,\ a,b\in\mathbb{Z}\}\subseteq\mathbb{C}$

$z,w \neq 0$ y $z\cdot w = 0$ $\quad$ $H \subseteq \mathbb{C}$

* $z,w \in H \Rightarrow z,w \in \mathbb{C}$

Pero $(\mathbb{C},+,\cdot)$ son un cuerpo (Cátedra)

y se sabe que en un cuerpo no pueden haber divisores de cero.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ Cuerpo

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo

ii) Demuestra que los únicos elementos invertibles de $(H,\cdot)$ son $1,-1,i,-i$

$H=\{z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ forma, prop

Escribimos la definición de elemento invertible

Si $z\in H$ tiene inverso para $\cdot$

$\exists\ z^{-1}$ tq $z^{-1}\in H \wedge z\cdot z^{-1} = \text{neutro}(\cdot)$

$z\cdot z^{-1} = 1$

Notemos que

1 es invertible pues $1 \in \mathbb{C}$

$$1 = 1 + 0 \cdot i \ , \ 1 \in H$$

$$1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$$ y es su propio inverso

-1 es invertible pues

$-1 \in \mathbb{C}$

$-1 = -1 + 0 \cdot i \in H$

$$-1 \cdot (-1)^{-1} = (-1) \cdot (-1) = 1 \quad \therefore \quad -1 \text{ invertible}$$

i | invertible pues

$i \in \mathbb{C} \quad a + bi \in H = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$

$i = 0 + 1 \cdot i \in H$

$$\rightarrow i \cdot (i)^{-1} = i \cdot -i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$-i$ el inverso de i

i es el inverso de $-i$

Probamos que $(H,\cdot)$

$\boxed{1, -1, i, -i \quad \text{tienen inversos}}$

Cómo vemos que son únicos

forma 1: Definición fórmula del inverso

forma 2: Usando definición inverso.

fórmula inverso: w es inverso de z

1) $\boxed{\text{Si} \quad w = \boxed{\dfrac{a}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{Z}} + i \boxed{\dfrac{(-b)}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{Z}}}$ $\quad w \in H$

$H = \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$

Si w es inverso de z, $z \in \mathbb{C}$ $z = a+bi$, $w \in \mathbb{C}$ $w = c+di$

$z \cdot w = 1$

$\boxed{(a+bi)(c+di) = 1}$ $\quad$ 2)

$$w = \frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z} + \boxed{\frac{-b}{a^2+b^2}} \in \mathbb{Z}$$

$a^2+b^2 \neq 0$

$$\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$w = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)i}{a^2+b^2} \in H$$

$a = 0$, $b = 1$ $\rightarrow$ $w = 0 + -1i = -1$

$a = 1$, $b = 0$ $\rightarrow$ $w = 1 + 0 \cdot i = 1$

$a = 0$, $b = -1$: $w = 0 + 1 \cdot i = i$

$a = -1$, $b = 0$: $w = -1 + 0 \cdot i = -1$

Definición de inverso | forma 2 |

Sea $z \in \mathbb{C}$ y w inverso de z
$w \in \mathbb{C}$

$z = a+bi \quad , \quad a,b \in \mathbb{Z} \quad , \quad z \in H$
$w = c+di \quad , \quad c,d \in \mathbb{Z} \quad , \quad w \in H$

$z \cdot w = 1 \iff$ Def inverso

$(a+bi)(c+di) = 1 = 1 + 0 \cdot i$ cartesiana

$= a \cdot c + a \cdot di + cbi + bd\, i^{2} = 1 + 0 \cdot i$ $\quad (i^2 = -1)$

$= \underbrace{(a \cdot c - b \cdot d)}_{\mathbb{R}} \cdot 1 + \underbrace{(ad + cb)}_{\mathbb{I}} \cdot i = \underbrace{1}_{\mathbb{R}} + \underbrace{0 \cdot i}_{\mathbb{I}}$

1) $ac - bd = 1 \;\wedge\;$ 2) $(ad + cb) = 0 \rightarrow$ $a=0, b=0$; $c=0, d=0$; $a \neq 0 \;\; b \neq 0$; $c \neq 0 \;\; d \neq 0$

Cuanto vale a,b,c,d?

Caso 1 | $a = 0 \quad , \quad c \neq 0$

1) $-bd = 1 \quad , \quad cb = 0 \;/ \cdot \frac{1}{c}$

$b = \frac{1}{-d} \qquad b = 0$

Caso 1: $c=d=0$ ✗

Caso 2: $c=0 \wedge d\neq 0 \Rightarrow i, -i$ ✓

Caso 3: $c\neq 0 \wedge d=0 \Rightarrow 1, -1$ ✓

Caso 4: $c, d \neq 0$ ✗

$$v)\ ac - bd = 1 \ \wedge \ *)\ ad + cb = 0$$

reemplazo en v)

Caso 1 $c=d=0$ ✗

$0 - 0 = 0 = 1$ ✗

no ocurre

Caso 2: $c=0$, $d\neq 0$

$*)\ ad + cb = 0$, $c=0$

$$\Rightarrow ad + 0 = 0$$
$$ad = 0$$
$$a = 0$$

reemplazamos en v) $\quad a\cancelto{0}{c} - bd = 1$

$$-bd = 1$$

$b \in \mathbb{Z}$

$d \in \mathbb{Z}$, $b=1$, $d=-1 \rightarrow$

$d=-1$, $b=1 \rightarrow$

$z = a+bi$, $w = c+di$

$z = bi \qquad w = di$

$z = i \quad , \quad w = -i$

$z = -i \quad , \quad w = i$ ✓

P2) Encuentre los complejos $z \in \mathbb{C}$

$z^6 = 1$ y $\bar{z}^2 + z = 0$

La raíz solución enésima de z es w

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{z^n = w}$ TFA

$\boxed{z^n = w} \longrightarrow n$ solución

La raíz cúbica de 1

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + 1)$

$$z^3 = 1$$

$z^3 - 1^3 = 0$

$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

$z - 1 = 0 \lor z^2 + z + 1 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$, \ a = 1 \ , b = 1 \ , c = 1$

$z=1 \quad \vee \quad \boxed{z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}}$

$\boxed{z=1}$

Extra | Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$

z es raíz cúbica de la unidad

$\rightarrow (1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6 = 62$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = re^{i\theta}$

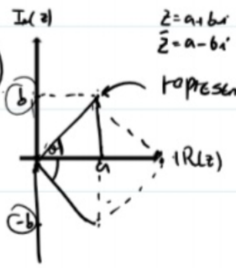
Cartesiana = Polar

P2) Encuentre los complejos $z \in \mathbb{C}$

$z^6 = 1$ y $\bar{z}^2 + z = 0$

$z^6 - 1^6 = 0$

Solución Extra propuesto

a)


$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$

representación complejo

$P(x)$

* Raíces cúbicas de la unidad.

$X^3 = 1 \Rightarrow X^3 - 1^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\boxed{X_1 = 1}$; $X_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$\boxed{X_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

$\cancel{X_1 = 1}$

$X_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ✓

$X_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ✓

teniendo esto verifiquemos que $z^2 + z + 1$ tiene estas soluciones

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \wedge z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ //

$z_1 \in \mathbb{C} \wedge z_2 \in \mathbb{C}$ //

b) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$

Recordemos! ¿Qué relación hay, Polar y cartesiana?

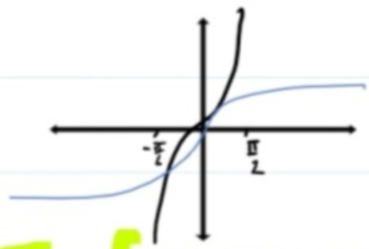
$z = a - bi$ (cartesiana) | $z = Re^{i\theta}$

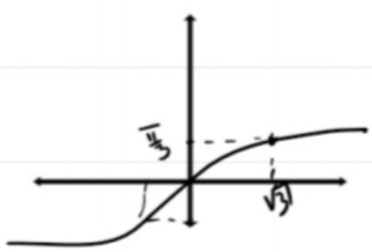
$R^2 = a^2 + b^2$

$R = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0,\ b \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$

$tg(x)$





$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \pi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \pi$

Sabemos

$= \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3}$ //

$R = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ //

$\boxed{z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3} i}}$ //

$z_2 = -\underset{<0}{\frac{1}{2}} + \underset{>0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} i$

$R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi =$

$= \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi$

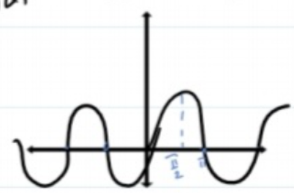
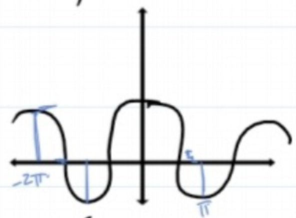
$= -\frac{\pi}{3} + \pi \cdot \frac{3}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3} i}}$

Veremos $z_1 \wedge z_2$ $(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + \underbrace{(1+z^3)^6}_{} = 62 \;\big|\; e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$z_1 \big|$ $z_1^3 = \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^3 = e^{-\frac{2\pi}{3}\cdot 3} = e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)$

$= 1^3 = 1$ $\quad$ $\sin(\alpha)$ $\quad$ $\cos(\alpha)$ $\quad 1$

$1 + z_1^3 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1+z_1^3)^6 = 64 //$

$(1+z_1)^3$, $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow 1 + z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$\theta_{1+z_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$ → Primer caso pues $a>0$

$f(x) = f(-x) \qquad f(x) = -f(x)$

$\theta_{1+z_1} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 + z_1 = e^{-\frac{\pi}{3}\cdot i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 + z_1 = \left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^3 = e^{-\frac{\pi}{3}\cdot 3 i} = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$

$= \cos(\pi) - i\sin(\pi)$

$= -1$

$= (1+z_1)^3 = -1 //$

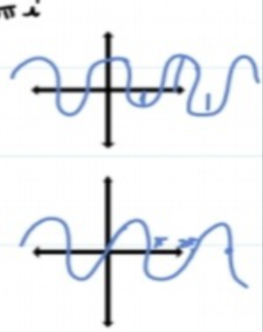
$(1+z_1^2)^9$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$z_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $R = 1$

$\Rightarrow (1 + z_1^2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^9$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad = e^{3\pi i}$



$(1+z_1^2)^9 = -1$ $\quad$ # $e^{3\pi i} = \cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$ $= -1$

$\Rightarrow \left(e^{3\pi i}\right)^9 = (-1)^9 = -1 //$

listo!

Como probe $z = \bar{z}$

$\Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} //$

si: $\boxed{z^n = w}$

$z^3 = 1 \rightarrow z_1, z_2, z_3$

las soluciones

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)} = w_k$$

$\rightarrow$ $n = 3$

3 soluciones

Para obtener θ en el intervalo [0, 2π), se deben usar las siguientes fórmulas (**arctan** denota la inversa de la función tangente):

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

Para obtener θ en el intervalo $(-\pi, \pi]$, se considera que **arctan** $\left(\frac{y}{x}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es una función creciente en su dominio:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \end{cases}$$

$z^3 = 1 \Rightarrow (z^3 - 1^3) = 0$

$(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

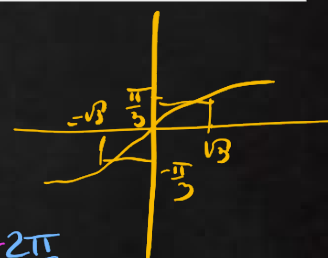
$z = 1$, $z^2 + z + 1 = 0$

$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Cartesiano $r = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$; $\theta = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \pi$

$= \arctan(\sqrt{3}) - \pi$

$= \frac{\pi}{3} - \pi \frac{3}{3} = -\frac{2\pi}{3}$



$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3} i}$

$r = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3} i}$ ✓

$z_3 = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ ✓

$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi$

$= \arctan(-\sqrt{3}) + \pi$

$-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$z^n = w \iff w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{2\pi k + \theta}{n}\right)}$

$z^3 = 1 \iff w_k = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi k + 0}{3}\right)}$

$w_1 = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_2$

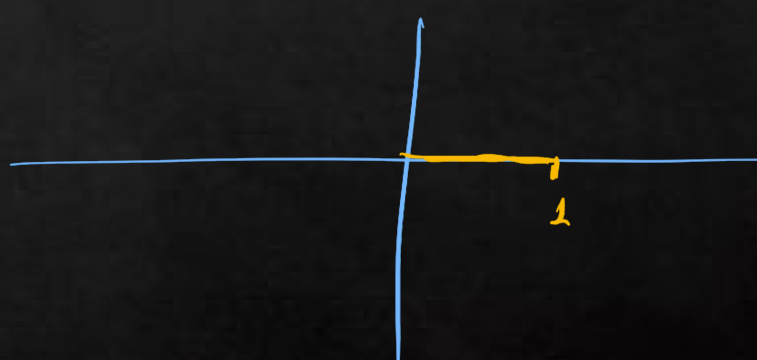
$w_0 = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i \cdot 0} = 1 = z_3$

$w_2 = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi \cdot 2 + 0}{3}\right)} = e^{\frac{4\pi}{3} i} = z_1$

$= 1 + 0 \cdot i$

$r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\theta = 0$



$z_1 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} \stackrel{?}{=} e^{\frac{4\pi}{3}i}$

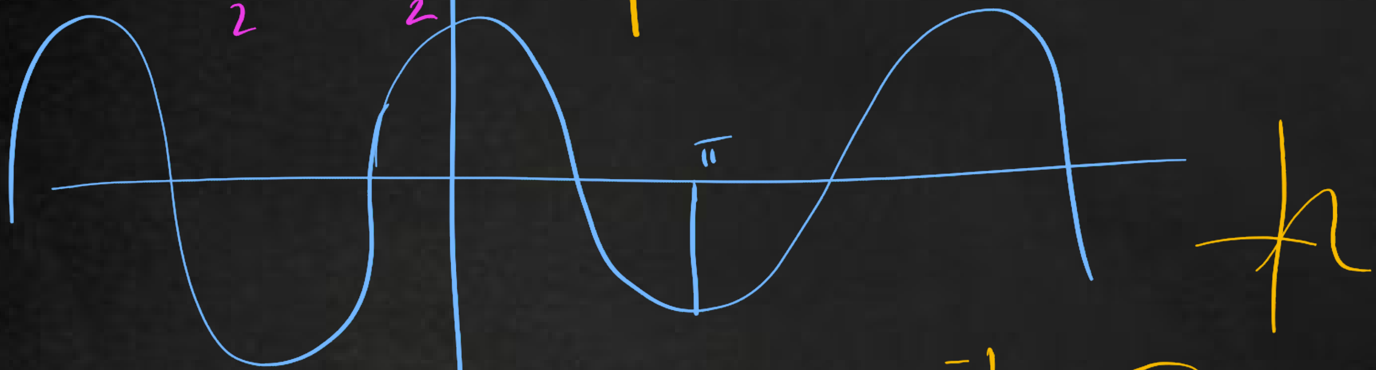
$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

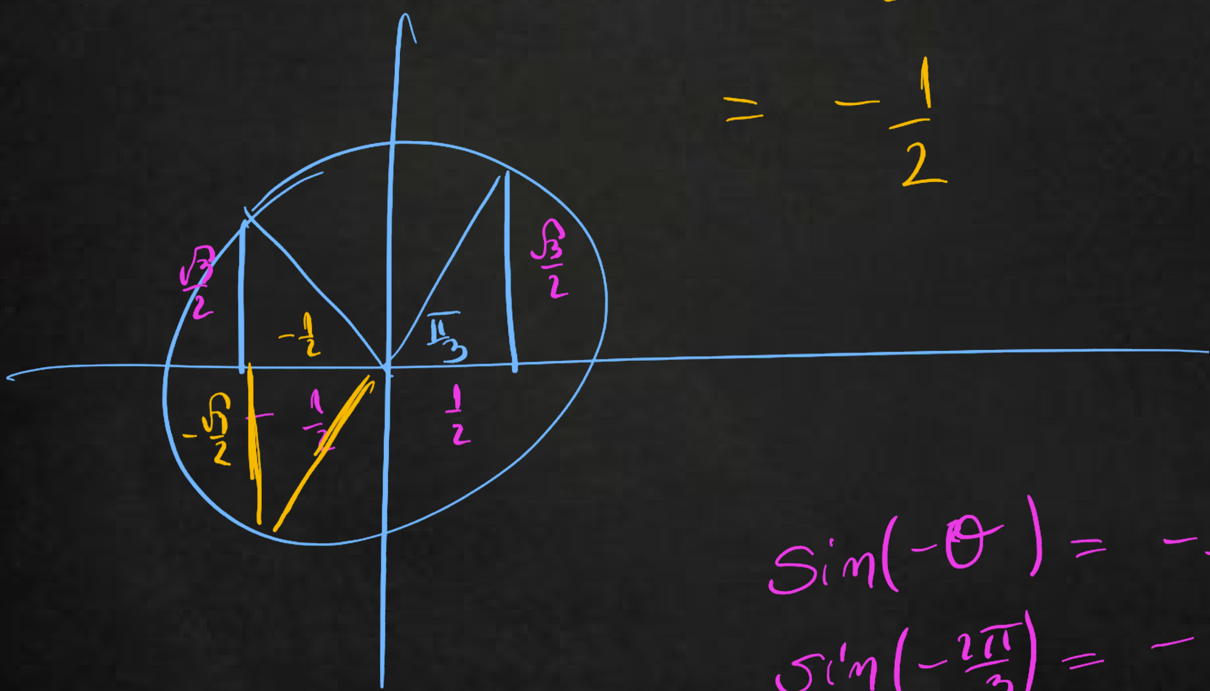
$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ //



$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cancel{\cos(\pi)}^{-1} - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\text{sen}(\pi)$

$= \frac{1}{2} \cdot -1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0$

$= -\frac{1}{2}$



$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

P2) Encuentre los complejos $z \in \mathbb{C}$

$z^6 = 1 \wedge \boxed{\bar{z}^2 + z = 0}$

$z^n = w$

$1 = 1 + i\cdot 0 \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\theta = 0$

$w_0 = \sqrt[6]{1}\cdot e^{i\left(\frac{2\pi k + 0}{6}\right)} = e^{i0} = 1$

$w_1 = \sqrt[6]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$w_2 = \sqrt[6]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi 2}{6}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$w_3 = \sqrt[6]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi 3}{6}\right)} = e^{i\pi}$

$w_4 = \sqrt[6]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi 4}{6}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$w_5 = \sqrt[6]{1}\, e^{i\left(\frac{2\pi 5}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ //

$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)}$

$= \cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta)$

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)$

$= \cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta)$

$\bar{z} \quad \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$

$\bar{z}^2 + z = 0$

$w_0 = 1$

$\bar{1}^2 + 1 = 0$

$2 \neq 0 \qquad w_0 \times$ no sirve

$w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad / \quad \bar{z}^2 + z = 0$ lo que quiero

$\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}^2 + e^{\frac{\pi}{3}i} = 0$

$= \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + e^{\frac{\pi}{3}i}$

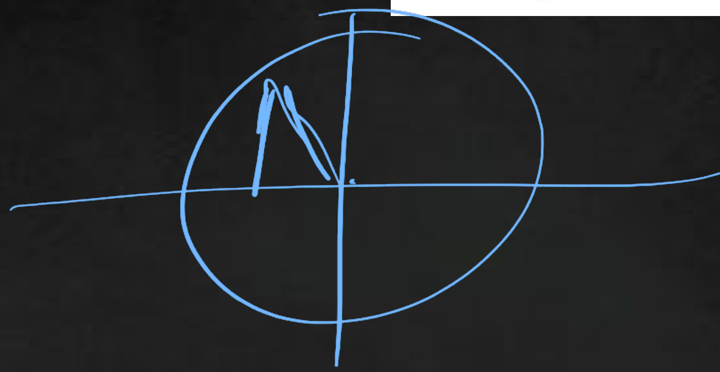
$= \boxed{e^{-\frac{2\pi}{3}i}} + \boxed{e^{\frac{\pi}{3}i}}$

$= \underbrace{\boxed{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}_{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$

w_1 ✓

$w_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\bar{z}^2 + z = 0$$



$$\overline{e^{i\frac{2\pi}{3}}}^{\,2} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \underbrace{\cos\left(-\tfrac{4\pi}{3}\right)} + i\,\text{sen}\left(-\tfrac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \neq 0$$

w_2 ✗

$w_3 =$ ✓

$w_4 =$ ✗

$w_5 =$ ✓

$$\left(re^{i\theta}\right)^{100}$$

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}} \rightarrow \text{Propuesto}$$

Polares

$gr(p(x)) = 4$ ↯

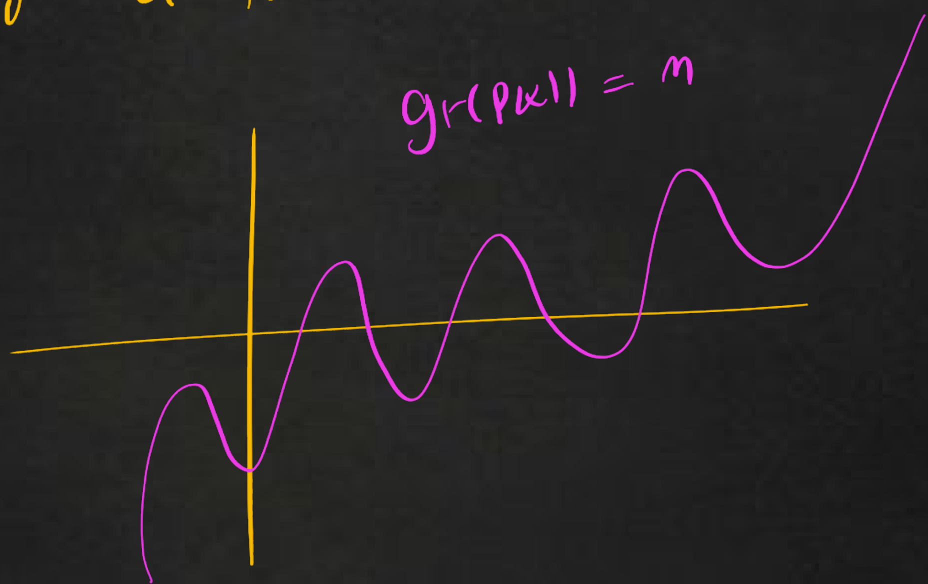
$$\boxed{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d + fx^4}$$

TFA =

$gr(p(x)) = n \geq 1$

tengo a lo más n solución

$gr(p(x)) = n$



$z^9 = 0$ / 9 soluciones

$z = 0$

Algoritmo de la división

4 Pasitos para tomar

Polinomio y dividirlo

$$x^4+3x^3-12x^2-13x-15 \;/\; (x-3)$$

$$= P(x) = (x-3)\,Q(x) \qquad /\; gr(P(x)) - 1 = gr(Q(x))$$

Algoritmo división

$$x^3+6x^2+6x+5 = Q(x)$$

$$(x-3) \mid x^4+3x^3-12x^2-13x-15$$

$$\cancel{x^4}-3x^3$$

$$\cancel{6x^3}-12x^2$$

$$\cancel{6x^3}-18x^2$$

$$\cancel{6x^2}-13x$$

$$\cancel{6x^2}-18x$$

$$5x-15$$

$$5x-15$$

$$\text{Resto} = 0 \;//$$

1) tomar el término mayor y dividirlo por el divisor = denominador x

$$\frac{x^4}{x} = \boxed{x^3}$$

$$x^3(x-3) = x^4-3x^3$$

al primero lo resto el segundo

$$\frac{6x^3}{x} = \boxed{6x^2}$$

$$6x^2(x-3) = 6x^3-18x$$

$$\frac{6x^2}{x} = \boxed{6x}$$

$$6x(x-3) = 6x^2-18x$$

$$\frac{5x}{x} = \boxed{5}$$

$$5(x-3) = 5x-15$$

$$P(x) = x^4+3x^3-12x^2-13x-15 = (x-3)(x^3+6x^2+6x+5) = (x-3)Q(x))$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

2) $\dfrac{P(x)^{n}}{Q(x)^{(1)}} = J(x)^{n-1} \quad + R(x)$

$\dfrac{x^4 + \dots}{x-3} = (x^3 + \dots) \quad + R(x) = 0$

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2}$

$= \underbrace{1}_{J(x)Q(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{R(x)}$

1) $P(x) = J(x)\,Q(x) \,,\; R(x) = 0$

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ factorizar en $\mathbb{R}$

$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = 0$

factorizar en $\mathbb{C}$

$(x_0 - 1)(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$x_1 \in \mathbb{C}$, x_2 su conjugado

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\frac{\boxed{x^3}+2x}{\boxed{-2x}+1}$$

La derivada es lineal

$(p_k x^k)' = k p_k \cdot x^{k-1}$.

1. (30 min.) Dado un polinomio $(P(x))' = \sum_{k=0}^{n} (p_k x^k)'$ se define $\vec{L}(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} k p_k x^{k-1}$.

$p_0 x^0 + p_1 x^1 + \ldots p_n x^n$

a) Determine el grado de $L(P)(x)$. $n-1$

b) Demuestre que si $P(x)$, $Q(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente, entonces $L(P \cdot Q) = L(P) \cdot Q + P \cdot L(Q)$.

c) Pruebe por inducción sobre n, que si $P(x) = (x-d)^n$, entonces $L(P)(x) = n \cdot (x-d)^{n-1}$.

$(fg)' = f'g + fg'$

a) Probar $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$

Si $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

$z = (1-i)^n + (1+i)^n$

Sea $\bar{z} = \overline{(1-i)^n + (1+i)^n}$

$= \overline{(1-i)^n} + \overline{(1+i)^n}$

$= (\overline{1-i})^n + (\overline{1+i})^n$

$= (1+i)^n + (1-i)^n$

$= z$ //

Propuesto $\overline{w}^n = (\overline{w^n})$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Propuesto hacerlo por inducción

b) Considere los complejos $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 + i$.

i) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma cartesiana.

Solución:
Primera forma (multiplicando y dividiendo por el conjugado):
Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} && \text{(Reemplazando)} \\
&= \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} && \text{(Multiplicando y dividiendo por } 1-i \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}) \\
&= \frac{1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1^2-i^2} && \text{(Expandiendo – } \textbf{(0,3) pts.}) \\
&= \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+1} && (i^2=-1 \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}) \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i. && \text{(Reordenando – } \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

Segunda forma (usando la fórmula del inverso):
La fórmula del inverso dice que

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

si $a + bi \neq 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Aplicando esta fórmula a z_2, tenemos $a = 1$ y $b = 1$, por lo que

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{1^2+1^2} - \frac{1}{1^2+1^2}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(0,3 pts. por aplicar correctamente la fórmula del inverso a $\mathbf{1+i}$)
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= (1+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) && \text{(Reemplazando)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 && \text{(Expandiendo – } \textbf{(0,3) pts.}) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} && (i^2=-1 \text{ – } \textbf{(0,3) pts.}) \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i. && \text{(Reordenando – } \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

ii) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma polar.

Solución: Comenzamos escribiendo z_1 en forma polar. Tenemos que

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

(0,1 pts. por encontrar el módulo de z_1)
Además, si se dibuja z_1 en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+\sqrt{3}i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, por lo que $\arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/3$ **(0,1 pts.)**
Obtenemos de esta forma que $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ **(0,1 pts.)**
Escribimos ahora z_2 en forma polar. Tenemos que

$$|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

(0,1 pts. por encontrar el módulo de z_2)
Además, si se dibuja z_2 en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+i)) = \frac{1}{1} = 1$, por lo que $\arg(1+i) = \pi/4$ **(0,1 pts.)** Obtenemos de esta forma que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ **(0,1 pts.)**
Finalmente, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} && \text{(Reemplazando)} \\
&= \sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} && \text{(Propiedades de potencias – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)} \\
&= \sqrt{2}e^{i\pi/12}. && (\pi/3-\pi/4=\pi/12 \text{ – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

iii) (1 pto.) Concluya que $\cos(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ y que $\operatorname{sen}(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Solución: Juntando las partes i) y ii), tenemos que

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

(0,2 pts. por juntar las partes i) y ii))
Por lo tanto,

$$e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i.$$

(0,2 pts. por despejar $e^{i\pi/12}$).
Finalmente, como además $e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i\operatorname{sen}(\pi/12)$ **(0,3 pts.)**, concluimos igualando partes reales e imaginarias que

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

y

$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(0,3 pts. por concluir el resultado)

P1. a) Considere el subconjunto H de los números complejos definido por $H = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Denotamos por $+$ la suma de números complejos y por $\cdot$ el producto de números complejos. Se sabe (no lo demuestre) que $(H, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, donde el neutro para $+$ corresponde a $0 \in \mathbb{C}$ y el neutro para $\cdot$ corresponde a $1 \in \mathbb{C}$.

i) (1 pto.) Demuestre que $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero.

Solución: Supongamos que $(H, +, \cdot)$ tiene divisores de cero. Entonces, existen $z, w \in H$ tales que $z, w \neq 0$ y $z \cdot w = 0$ **(0,3 pts.)**. Como $H \subseteq \mathbb{C}$, z y w pertenecen a $\mathbb{C}$, y como las operaciones de H son exactamente la suma y el producto complejos, deducimos que z y w son divisores de cero en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **(0,2 pts.)**, pero $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo y por lo tanto no tiene divisores de cero, lo cual es una contradicción. Concluimos que tales z y w no pueden existir, y por lo tanto $(H, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero **(0,5 pts.)**.

ii) (2 pts.) Demuestre que los únicos elementos invertibles de $(H, \cdot)$ son 1, -1, i y $-i$.

Solución: En primer lugar, notemos que 1, -1, i y $-i$ son invertibles para el producto: el inverso de 1 es 1, el inverso de -1 es -1, y finalmente i y $-i$ son inversos el uno del otro **(0,5 pts.)**
Para mostrar que estos cuatro son los únicos elementos invertibles, podemos proceder de alguna de las dos formas siguientes.

Primera forma (usando la fórmula para el inverso en $\mathbb{C}$):
Supongamos que $z = a + bi \in H$ es invertible. Esto quiere decir que existe $w = c + di \in H$ tal que $z \cdot w = 1$. Esto de inmediato fuerza a que $z, w \neq 0$. Como $H \subseteq \mathbb{C}$, tal w será inverso de z en $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, y como $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo, entonces z tiene un único inverso, cuya forma ya conocemos:

$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \quad \textbf{(0,5 pts.)}$$

Si queremos que w adicionalmente pertenezca a H, en particular se debe cumplir que $\frac{a}{a^2+b^2}$ pertenezca a $\mathbb{Z}$ **(0,2 pts.)**, lo cual sólo es posible si, o bien $a = 0$, o bien $a \in \{1, -1\}$ y $b = 0$ **(0,4 pts.)**

- Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y obtenemos que $z = ib$ y $w = i\frac{-1}{b}$, y puesto que $w \in H$, $\frac{-1}{b} \in \mathbb{Z}$, esto fuerza a que $b \in \{1, -1\}$. En este caso, o bien $z = i$ y $w = -i$, o bien $z = -i$ y $w = i$ **(0,2 pts.)**
- Si $a \in \{1, -1\}$ y $b = 0$, obtenemos que, o bien $z = w = 1$, o bien $z = w = -1$ **(0,2 pts.)**

En cualquier caso notamos que las únicas posibilidades para z son $1, -1, i$ y $-i$.

Segunda forma (usando definición de inverso):
Supongamos que $z = a + bi \in H$ es invertible. Esto quiere decir que existe $w = c + di \in H$ tal que $z \cdot w = 1$. Desarrollando la ecuación, obtenemos que $ac - bd = 1$ y $ad + bc = 0$ **(0,3 pts.)**
Vamos a dividir todas las situaciones posibles en cuatro casos para c y d: $c = d = 0$, $c = 0 \wedge d \neq 0$, $c \neq 0 \wedge d = 0$ y $c, d \neq 0$.
Caso 1: $c = d = 0$. En este caso, obtenemos que $0 = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, este caso no puede darse **(0,3 pts.)**
Caso 2: $c = 0 \wedge d \neq 0$. En este caso, obtenemos que $ad = 0$ y como $d \neq 0$, necesariamente $a = 0$. Reemplazando en la primera ecuación, obtenemos que $bd = -1$, y como $b, d \in \mathbb{Z}$, sólo tenemos dos opciones: $b = 1, d = -1$ o bien $b = -1, d = 1$. En la primera opción $z = i$ y $w = -i$, en la segunda

opción $z=-i$ y $w=i$ **(0,3 pts.)**
Caso 3: $c \neq 0 \wedge d = 0$. En este caso, obtenemos que $bc=0$ y como $c \neq 0$, necesariamente $b=0$. Reemplazando en la primera ecuación, obtenemos que $ac=1$, y como $a,c \in \mathbb{Z}$, sólo tenemos dos opciones: $a=c=1$ o bien $a=c=-1$. En la primera opción $z=w=1$ y en la segunda opción $z=w=-1$ **(0,3 pts.)**
Caso 4: $c, d \neq 0$. En este caso, podemos despejar a en ambas ecuaciones para obtener que

$$\frac{1+bd}{c} = \frac{-bc}{d}.$$

lo que conduce a la siguiente ecuación cuadrática en d,

$$bd^2 + d + bc^2 = 0.$$

Si $b=0$, esta ecuación nos conduce a que $d=0$, lo que es una contradicción. Si $b \neq 0$, las soluciones de esta ecuación son

$$d = \frac{-1+\sqrt{1-4b^2c^2}}{2b} \quad \text{y } d = \frac{-1-\sqrt{1-4b^2c^2}}{2b},$$

pero d es un entero, en particular un real, por lo tanto necesariamente el argumento de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero, es decir,

$$4b^2c^2 \leq 1.$$

Como $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, esta desigualdad nunca se tendrá. Concluimos que el caso $c, d \neq 0$ nunca se puede dar **(0,3 pts.)**

Habiendo analizado los cuatro casos, concluimos que las únicas posibilidades para z son $1, -1, i$ y $-i$.

P2. a) (3 pts.) Encuentre todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que cumplen, simultáneamente, que $z^6 = 1$ y que $\bar{z}^2 + z = 0$.

Solución:

Primera forma (Resolviendo la primera ecuación y evaluando en la segunda):

Notemos que la primera ecuación impone que z debe ser una raíz sexta de la unidad **(0,3 pts)**.
Las raíces sextas de la unidad son los elementos del conjunto

$$\{1 = w_0, w_1, \cdots, w_5\},$$

donde $w_k = e^{ik\pi/3}$ para $k \in \{0, \cdots, 5\}$ **(0,5 pts)**. Luego, sólo tenemos seis posibilidades para z. De estas seis posibilidades, vamos a evaluar cuáles satisfacen además la segunda ecuación.

- $\overline{w_0}^2 + w_0 = 1^2 + 1 = 1 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_1}^2 + w_1 = w_5^2 + w_1 = w_4 + w_1 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_2}^2 + w_2 = w_4^2 + w_2 = w_2 + w_2 \neq 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_3}^2 + w_3 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_4}^2 + w_4 = w_2^2 + w_4 = w_4 + w_4 \neq 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $\overline{w_5}^2 + w_5 = w_1^2 + w_5 = w_2 + w_5 = 0 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.

Así, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen ambas ecuaciones son $w_1 = e^{i\pi/3}, w_3 = -1$ y $w_5 = e^{5\pi/3}$ **(0,4 pts)**.

Segunda forma (Resolviendo la segunda ecuación y evaluando en la primera):
La segunda ecuación impone que z debe cumplir $\overline{z}^2 = -z$ **(0,1 pts)**. Primero observamos que $z = 0$ satisface esta ecuación **(0,2 pts)**. Podemos suponer entonces $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y ver qué otras soluciones existen.
Para encontrar las soluciones no nulas, hay dos formas:
Primera forma para encontrar las soluciones no nulas:
Escribiendo $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 = -z &\iff (\overline{re^{i\theta}})^2 = -e^{i\theta} && (z = re^{i\theta} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff (re^{-i\theta})^2 = e^{i\pi}e^{i\theta} && (\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \text{ y } e^{i\pi} = -1 - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff r^2 e^{-2i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}. && (\text{Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre} - \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

Como $r > 0$, de la última ecuación obtenemos que $r = 1$, por lo que $|z| = 1$ **(0,2 pts)**. Además, obtenemos que $-2\theta + 2k\pi = \theta + \pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ **(0,2 pts)**. Despejando, resulta que

$$\theta = \frac{2k\pi - \pi}{3}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$ **(0,2 pts)**. Concluimos así que hay tres soluciones más, que se obtienen tomando $k \in \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto, el conjunto de soluciones es

$$\{0, e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3}\}.$$

(0,2 pts por encontrar las soluciones no nulas de $\overline{z}^2 + z = 0$ – ya se asignó puntaje por la solución nula).

Segunda forma para encontrar las soluciones no nulas:
Alternativamente, es posible manipular la ecuación para llegar a que, si $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 + z = 0 &\iff \overline{z}^2 = -z && (\text{Álgebra de números complejos} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff 1 = -\frac{z}{\overline{z}^2} && (z \neq 0 \iff \overline{z} \neq 0 - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff 1 = -z\left(\frac{z}{|z|^2}\right)^2 && (z\overline{z} = |z|^2 \implies \tfrac{1}{\overline{z}} = \tfrac{z}{|z|^2} - \textbf{(0,1) pts.})\\
&\iff z^3 = -|z|^4. && (\text{Álgebra de números complejos} - \textbf{(0,1) pts.})
\end{aligned}$$

Tomando módulos, se encuentra que $|z|^3 = |z|^4$, lo que muestra que $|z| = 1$ (porque $z \neq 0$) **(0,1 pts.)**. Por lo tanto, la ecuación queda $z^3 = -1$ **(0,2 pts.)**. Como $-1 = e^{i\pi}$ en forma polar **(0,1 pts.)**, esta ecuación tiene por soluciones a $e^{i(\pi+2k\pi)/3}$ con $k \in \{0, 1, 2\}$ **(0,1 pts.)**, de donde se obtiene que el conjunto de soluciones es

$$\{0, e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3}\}.$$

(0,2 pts por encontrar las soluciones no nulas de $\overline{z}^2 + z = 0$ – ya se asignó puntaje por la solución nula).

Podemos verificar ahora cuáles de esta soluciones satisfacen además la primera ecuación.

- $0^6 = 0 \implies$ no la satisface **(0,3 pts)**.
- $(e^{i\pi/3})^6 = e^{2\pi i} = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $(-1)^6 = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.
- $(e^{5i\pi/3})^6 = e^{10\pi i} = 1 \implies$ sí la satisface **(0,3 pts)**.

Así, los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen ambas ecuaciones son $e^{i\pi/3}$, -1 y $e^{5i\pi/3}$ **(0,4 pts)**.

b) (3 pts.) Calcule la parte real e imaginaria del número complejo

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}}.$$

Comenzamos transformando $1+i$ a forma polar. Se tiene que

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \textbf{(0,3 pts.)}.$$

Además, si se dibuja el número complejo $1+i$ en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+i)) = \frac{1}{1} = 1$ **(0,1 pts.)**, por lo que $\arg(1+i) = \pi/4$. Obtenemos de esta forma que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ **(0,2 pts.)**.

Ahora, transformaremos $1+\sqrt{3}i$ a forma polar. Se tiene que

$$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2. \quad \textbf{(0,3 pts.)}.$$

Además, si se dibuja el número complejo $1+\sqrt{3}i$ en el plano, se ve que el ángulo $\arg(1+\sqrt{3}i) \in [0, 2\pi)$ que forma con la horizontal cumple $\tan(\arg(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ **(0,1 pts.)**, por lo que $\arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/3$. Obtenemos de esta forma que $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ **(0,2 pts.)**.

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{100}}{(2e^{i\pi/3})^{50}} && \text{(Reemplazar numerador y denominador por sus formas polares)}\\
&= \frac{(\sqrt{2})^{100}e^{100i\pi/4}}{2^{50}e^{50i\pi/3}} && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}\\
&= \frac{2^{50}e^{25\pi i}}{2^{50}e^{50i\pi/3}} && \text{(Propiedades de potencias y simplificaciones)}\\
&= \frac{e^{25\pi i}}{e^{50i\pi/3}}. && \text{(Simplificar – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
e^{25\pi i} &= e^{i\pi+24\pi i} && \text{(Separar múltiplos de } 2\pi i \text{ – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{i\pi+12\cdot 2\pi i} && (24 = 12\cdot 2)\\
&= e^{i\pi}e^{12\cdot 2\pi i} && \text{(Propiedades de potencias – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{i\pi}(e^{2\pi i})^{12} && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}\\
&= e^{i\pi}\cdot 1^{12} && (e^{2\pi i} = 1 \text{ – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{i\pi} && (1^{12} = 1)
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
e^{50i\pi/3} &= e^{(2\pi+48\pi)i/3} && \text{(Separar múltiplos de } 2\pi i \text{ – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{2\pi i/3+16\pi i} && \text{(Álgebra de números complejos)}\\
&= e^{2\pi i/3+8\cdot 2\pi i} && (16 = 8\cdot 2)\\
&= e^{2\pi i/3}e^{8\cdot 2\pi i} && \text{(Propiedades de potencias – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{2\pi i/3}(e^{2\pi i})^8 && \text{(Propiedades de potencias/Fórmula de de Moivre – } \textbf{(0,2) pts.}\text{)}\\
&= e^{2\pi i/3}1^8 && (e^{2\pi i} = 1 \text{ – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}\\
&= e^{2\pi i/3}. && (1^8 = 1)
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
z &= \frac{e^{i\pi}}{e^{2\pi i/3}} && \text{(Reemplazando los resultados anteriores)}\\
&= e^{i(\pi-2\pi/3)} && \text{(Propiedades de potencias – } \textbf{(0,1) pts}\text{)}\\
&= e^{i\pi/3} && (1-2/3 = 1/3 \text{ – } \textbf{(0,1) pts}\text{)}\\
&= \cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3) && (e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \text{ para todo } \theta\in\mathbb{R} \text{ – } \textbf{(0,1) pts}\text{)}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. && (\cos(\pi/3) = 1/2 \text{ y } \mathrm{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \text{ – } \textbf{(0,1) pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}\mathrm{e}(z) = 1/2$ y $\mathbb{I}\mathrm{m}(z) = \sqrt{3}/2$ **(0,1 pts.)**

Duración: 1h 30'.

Capítulo 7

Números Complejos

7.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Determine todos los números complejos tales que $|z-2|=1$.

2. Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^5 = i$.

Solución:

1. Supongamos z de la forma $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$|z-2| = |a+ib-2| = \sqrt{(a-2)^2 + b^2}$$

Asi:

$$\begin{aligned} |z-2| = 1 \quad & \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + b^2} = 1 \\ & \Leftrightarrow (a-2)^2 + b^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow b^2 = 1 - (a-2)^2 \\ & \Leftrightarrow b = \sqrt{1-(a-2)^2} \ \vee \ b = -\sqrt{1-(a-2)^2} \end{aligned}$$

Pero $b \in \mathbb{R}$, por lo que debemos tener que $1-(a-2)^2 \geq 0$, desarrollemos esta desigualdad

$$1-(a-2)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \in [1,3]$$

Por lo tanto las soluciones son

$$\{a + i\sqrt{1-(a-2)^2} \mid 1 \leq a \leq 3\} \cup \{a - i\sqrt{1-(a-2)^2} \mid 1 \leq a \leq 3\}$$

2. Tenemos que resolver la ecuación $z^5 = i \Leftrightarrow z = i^{\frac{1}{5}}$, para esto escribamos i en forma polar:

$$r = |i| = 1 \quad \wedge \quad Arg(i) = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ i = e^{i(\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{i(\pi}{2+2k\pi)}}, k \in \mathbb{Z}$$

Luego $i^{\frac{1}{5}}$ toma los valores

$$w_k = 1^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5})} \qquad \text{para } k = 0,1,2,3,4$$

(sabemos que para los otros $k \in \mathbb{Z}$ obtendremos los mismos w)
Es decir, z puede tomar los valores:

$\cdot\ k = 0:$ $\qquad w_0 = e^{i(\frac{\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 1:$ $\qquad w_1 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5})} = e^{i(\frac{5\pi}{10})} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$

$\cdot\ k = 2:$ $\qquad w_2 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5})} = e^{i(\frac{9\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 3:$ $\qquad w_3 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5})} = e^{i(\frac{13\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 4:$ $\qquad w_4 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5})} = e^{i(\frac{17\pi}{10})}$

$\square$

P2)

1. Demuestre que para $n \geq 2$ la suma de las raices n-ésimas de la unidad es igual a cero.
2. Demuestre que las raices n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raiz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raiz n-ésima de la unidad.
3. Concluya que la suma de las raices n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

Solución:

1. Para $z = 1$, $r = |z| = 1$ y $Arg(z) = \theta = 0$, entonces como las raices n-ésimes de un complejo $z \neq 0$ son $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ para $k = 0, ..., n-1$, obtenemos que las raices n-ésimas de la unidad son:

$$w_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{para } k = 0,1,...,n-1$$

Asi, la suma de las raices n-ésimas de la unidad es

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{2k\pi}{n})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^k \\
&= \frac{1-(e^{i(\frac{2\pi}{n})})^n}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-cos(2\pi)-isen(2\pi)}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-1-0}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Notar que en el desarrollo anterior usamos que $n \geq 2$, pues si n pudiera tomar el valor 1, no podriamos haber usado la fórmula

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

que es la que usamos en el segundo paso, pues ésta es válida para $r \neq 1$.

2. $\cdot$ $z = 0$: directo, pues la única raiz n-ésima del cero es el cero.

   $\cdot$ $z \neq 0$: entonces z es de la forma $z = re^{i\theta}$ con $r \neq 0$ y sus raices n-ésimas son

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

Como $w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$, tenemos que las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

En la parte (a) vimos que las raices de la unidad son:

$$v_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

Asi, las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 v_k \qquad k = 0, ..., n-1$$

Es decir, las raices n-ésimas de un complejo z son las raices n-ésimas de la unidad multiplicadas por su raiz n-ésima correspondiente a evaluar en $k = 0$.

3. Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, w_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ sus raices n-ésimas y v_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ las raices n-ésimas de la unidad. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} v_k \qquad (por\ (b)) \\
&= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\
&= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} 0 \qquad (por\ (a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

P3)
1. Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{36}$
2. Calculando $(1-i)^n$ demuestre que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$$

3. Calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$

Solución:

1. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$ calculemos su forma polar:

$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1}$ y z está en el primer cuadrante $\Rightarrow$ $Arg(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$

Luego $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
z^{36} &= (2e^{\frac{i\pi}{3}})^{36} \\
&= 2^{36} e^{\frac{i\pi 36}{3}} \\
&= 2^{36} e^{i\pi 12} \\
&= 2^{36} (e^{2i\pi})^6 \\
&= 2^{36} 1^6 \\
&= 2^{36}
\end{aligned}$$

2. Por el Teorema del binomio, tenemos que

$$\begin{aligned}(1-i)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-i)^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(-i) + \binom{n}{2}(-i)^2 + \binom{n}{3}(-i)^3 + \binom{n}{4}(-i)^4 + \binom{n}{5}(-i)^5 + ... + \binom{n}{n}(-i)^n \\ &= 1 - i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} - i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} + i\binom{n}{7} + ... + (-i)^n\end{aligned}$$

Antes de seguir notemos lo siguiente, como $(-i)^4 = 1$ tenemos que:

Haciendo $k = 2l:\ (-i)^{2l} = (-1)^l; l \in \mathbb{N}$ (*)
Haciendo $k = 2l+1:\ (-i)^{2l+1} = (-i)(-1)^l; l \in \mathbb{N}$

Por lo tanto los términos que acompañan a los coeficientes combinatoriales se van repitiendo (repite la serie $1, -i, -1, i$). Asi, sabemos cúales son los signos de cada término y si va multiplicado por una i o no. Ahora que tenemos claro el comportamiento de los coeficientes, escribamos $(1-i)^n$ separando la parte real e imaginaria:

$$(1-i)^n = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \binom{n}{8} + ...\right] + (-i)\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + ...\right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}, k\le\frac{n}{2}} \binom{n}{2k}(-1)^k + (-i)\sum_{k\in\mathbb{N}, k\le\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

Para entender la última igualdad, notemos que si n es par, entonces $(-i)^n$ es real (ver (*)), por lo tanto el último término pertenece a la parte real, lo que concuerda con la igualdad en cuestión, ya que si n es par entonces $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$, por lo que el último término aparecerá en la parte real (el razonamiento es análogo si n es impar).
Calculemos ahora $(1-i)^n$ usando su forma polar. Sea $z = (1-i)$

$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$tg(\theta) = -1$ y z está en el cuarto cuadrante $\Rightarrow\ \theta = \frac{-\pi}{4}$

$$\begin{aligned}(1-i)^n = z^n &= (\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n(e^{\frac{-i\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n\left(cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right) - isen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= (\sqrt{2})^n cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right) - i(\sqrt{2})^n sen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Asi, tenemos dos expresiones para $(1-i)^n$. Luego sus partes reales e imaginarias deben coincidir, con lo que obtenemos que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}, k\le\frac{n}{2}} \binom{n}{2k}(-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

3. Para calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$, veamos la forma polar de $z = 1+i\sqrt{3}$ y $z' = 1-i\sqrt{3}$

   $r = |z| = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

   $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ y $Arg(z') = \frac{-\pi}{3}$

   Luego,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z'}\right)^{10} &= (\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{-i\pi}{3}}})^{10} \\
&= (e^{\frac{i\pi}{3}-(\frac{-i\pi}{3})})^{10} \\
&= (e^{\frac{i2\pi}{3}})^{10} \\
&= e^{\frac{i20\pi}{3}} \\
&= e^{i\pi(6+\frac{2}{3})} \\
&= e^{i6\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= 1e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

P4) 1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n}$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

2. Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si y sólo si $z_1 = z_2$.

Solución:

1. De las propiedades de los conjugados tenemos que:

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{1+z^n} = 1 + (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = \frac{1}{1+(\overline{z})^n}$$

   Por lo tanto

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\overline{z})^n} = \frac{1}{1+z^n} + \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = 2Re\left(\frac{1}{1+z^n}\right) \in \mathbb{R}$$

   Notar que $1 + z^n \neq 0$, ya que estamos trabajando con $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$, por lo que no hay problema de indefinición.

2. Probemos las dos implicancias
   ($\Leftarrow$) Suponemos $z_1 = z_2$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |2z_1| \\ &= 2|z_1| \\ &= |z_1| + |z_1| \\ &= |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

   Por lo tanto $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

   ($\Rightarrow$) Suponemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) \\ &= 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

   Por otro lado, $(|z_1| + |z_2|)^2 = (1+1)^2 = 4$

   Ahora,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} 4 = 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \quad &\Leftrightarrow 2 = 1 + Re(z_1\bar{z}_2) \\ &\Leftrightarrow 1 = Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

Asi, llegamos a que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$. Además, notemos que

$$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2| = 1 \cdot 1 = 1$$

Veamos ahora que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$ y $|z_1\bar{z}_2| = 1$ implican que $z_1\bar{z}_2 = 1$:

$Re(z_1\bar{z}_2) = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_2 = 1 + ib$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Pero también tenemos que $|z_1\bar{z}_2| = 1$, luego

$$|1 + ib| = \sqrt{1 + b^2} = 1 \Leftrightarrow 1 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b = 0$$

Por lo tanto tenemos que $z_1\bar{z}_2 = 1 + i0 = 1$

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 = 1 \quad & \Rightarrow z_1^{-1}z_1\bar{z}_2 = z_1^{-1} \quad (z_1^{-1} \textit{ existe pues } z_1 \neq 0) \\ & \Rightarrow \bar{z}_2 = z_1^{-1} \\ & \Rightarrow \bar{z}_2 = \tfrac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} \\ & \Rightarrow \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \qquad\qquad (|z_1| = 1) \\ & \Rightarrow z_2 = z_1 \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow z_1 = z_2$ que es lo que queriamos demostrar.

$\square$

P5)
1. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Pruebe que z es una raiz cúbica de la unidad.
2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   a) Probar que
   $$|1 - \bar{z}_1z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$
   b) Deducir que si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, entonces
   $$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1z_2|} < 1$$

Solución:

1. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + ib$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$

   $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$

   $|z + 1| = 1 \Rightarrow |z + 1|^2 = 1 \Rightarrow (a + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2a = 2$

   Luego, combinando ambas ecuaciones

$1 + 2a = 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{-1}{2}$. Reemplazando a en (1),

$\frac{1}{4} + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\vee\; b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Analicemos ambos casos:

$\cdot\; b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) + isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

$\cdot\; b = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{-i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{-i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) - isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) - isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

Asi, en ambos casos tenemos que $z^3 = 1$ que es lo que queriamos.

2. *a)*

$$\begin{aligned} |1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \quad & = (1 - \overline{z_1}z_2)\overline{(1 - \overline{z_1}z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ & = (1 - \overline{z_1}z_2)(1 - z_1\overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ & = (1 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_1|^2|z_2|^2) - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2) \\ & = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 \\ & = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) \end{aligned}$$

b) Como $|z_1| < 1 \Rightarrow |z_1|^2 < 1 \Rightarrow (1 - |z_1|^2) > 0$. Por lo tanto tenemos que

$$0 < (1 - |z_1|^2) \wedge 0 < (1 - |z_2|^2)$$

Luego

$$0 < (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

y por la parte anterior, tenemos que

$$0 < |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$$

o equivalentemente

$$0 < \underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|)}_{A}\underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)}_{B}$$

Ahora, como $B > 0$ y $AB > 0$, entonces $A > 0$. Por lo tanto

$$|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2| > 0 \Rightarrow |1 - \bar{z}_1 z_2| > |z_1 - z_2| \Rightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} < 1$$

Notar que no hay problema en dividir por $|1 - \overline{z_1} z_2|$, pues $|1 - \overline{z_1} z_2| > 0$. En efecto:

$$|z_1| < 1 \wedge |z_2| < 1 \Rightarrow |\overline{z_1}| \wedge |z_2| < 1 \Rightarrow |\overline{z_1} z_2| < 1 \Rightarrow -|\overline{z_1} z_2| > -1$$

Ahora, usando la propiedad de desigualdad triangular y el hecho que $|1| = 1$, obtenemos que

$$1 = |1 - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1} z_2| \leq |1 - \overline{z_1} z_2| + |\overline{z_1} z_2| \Rightarrow |1 - \overline{z_1} z_2| \geq 1 - |\overline{z_1} z_2| > 1 - 1 = 0.$$

□

7.2. Problemas propuestos.

P1)
1. Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.
2. Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte i es cero.
3. Pruebe que $\frac{(1+i)^{24}}{(1-i)^{20}} = -4$

P2) Sea α una raiz séptima cualquiera de la unidad, distinta de 1. Pruebe que :

1. $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.
2. $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

P3)
1. Calcule las raices de $z^2 = -i$ y exprésela de la forma $a + bi$.
2. Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$
3. Pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

P4) Considere los números reales
$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(k\alpha) \quad y \quad S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sen(k\alpha)$$

1. Probar la siguiente igualdad de números complejos
$$S + iS' = (1 + cos(\alpha) + isen(\alpha))^n$$
2. Escriba el número complejo $1 + cos(\alpha) + isen(\alpha)$ en forma polar y deduzca que
$$S = 2^n (cos(\alpha/2))^n cos(n\alpha/2) \quad y \quad S' = 2^n (cos(\alpha/2))^n sen(n\alpha/2)$$
Indicación: recuerde que $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$ y $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$

P5) Sea $n > 2$, sea $a = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sean $X, Y \in M_{nn}(\mathbb{C})$ las matrices definidas por $(X)_{jk} = a^{(j-1)(k-1)}$ $\quad (Y)_{jk} = a^{-(j-1)(k-1)}$.

1. Calcular X^2.
2. Calcular XY.

14. Semana 13

P1 **(a)** Si tenemos $|z| = |z+1| = 1$, elevando al cuadrado se tiene que $|z|^2 = |z+1|^2 = 1$, recordando que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, entonces

$$\begin{aligned}
|z+1|^2 &= 1\\
(z+1)\cdot\overline{(z+1)} &= 1\\
(z+1)\cdot(\overline{z}+\overline{1}) &= 1\\
(z+1)\cdot(\overline{z}+1) &= 1\\
z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+1 &= 1\\
|z|^2+z+\overline{z}+1 &= 1\\
1+z+\overline{z}+1 &= 1\\
z &= -1-\overline{z}
\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}
z^3 &= z^2\cdot z\\
&= z^2\cdot(-1-\overline{z}) \qquad \backslash\text{usando la igualdad anterior}\\
&= -z^2 - z\cdot z\cdot\overline{z}\\
&= -z^2 - z\cdot|z|^2\\
&= -z^2 - z\\
&= z(-z-1)\\
&= z\cdot\overline{z} \qquad \backslash\text{usando la igualdad anterior}\\
&= |z|^2\\
&= 1
\end{aligned}$$

Se concluye que z es raíz cúbica de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
|1-z_2\overline{z_1}|^2-|z_1-z_2|^2 &= (1-z_2\overline{z_1})\overline{(1-z_2\overline{z_1})}-(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(\overline{1}-\overline{z_2\overline{z_1}})-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(1-\overline{z_2}z_1)-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}z_1\overline{z_2}-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}+|z_1|^2|z_2|^2-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}+|z_1|^2|z_2|^2-(z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}+|z_1|^2|z_2|^2-(|z_1|^2-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+|z_2|^2)\\
&= 1-\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}-|z_2|^2\\
&= 1+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2)-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2)-|z_2|^2(1-|z_1|^2)\\
&= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)
\end{aligned}$$

(c) Como se tiene que $|z_1|<1$ y $|z_2|<1$, elevando al cuadrado se deduce que $|z_1|^2<1$ y $|z_2|^2<1$, o lo que es lo mismo $(1-|z_1|^2)>0$ y $(1-|z_2|^2)>0$, si multiplicamos ambas desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) &> 0\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2-|z_1-z_2|^2 &> 0 \qquad \backslash \text{usando la igualdad anterior}\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 &> |z_1-z_2|^2 \qquad \backslash \cdot \frac{1}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
\frac{|1-z_2\overline{z_1}|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \qquad \backslash\sqrt{()}\\
1 &> \frac{||z_1-z_2||}{||1-z_2\overline{z_1}||}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_2\overline{z_1}|}
\end{aligned}$$

P2 Por propiedad de los complejos si $z \in \mathbb{C}$ y $z = \overline{z}$ entonces $z \in \mathbb{R}$, procedemos entonces a obtener el conjugado de la expresión, llamemos $w = \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}$, luego

$$
\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}} \\
&= \overline{\frac{1}{1+z^n}} + \overline{\frac{1}{1+\overline{z}^n}} && \backslash\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&= \frac{\overline{1}}{\overline{1+z^n}} + \frac{\overline{1}}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{1}{\overline{1+z^n}} + \frac{1}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash\text{el conjugado de un número real es el mismo número} \\
&= \frac{1}{\overline{1}+\overline{z^n}} + \frac{1}{\overline{1}+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z^n}} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}}^n} && \backslash\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ inductivamente } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+z^n} && \backslash\overline{\overline{z}} = z \\
&= \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n} \\
&= w
\end{aligned}
$$

Se concluye que $w \in \mathbb{R}$.

P3 **(a)** Sean $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ las representaciones polares de z_1 y z_2 respectivamente, el ángulo entre z_1 y z_2, es decir entre θ_1 y θ_2, puede ser $\theta_1 - \theta_2$ o $\theta_2 - \theta_1$ (dependiendo si $\theta_1 > \theta_2$ o si $\theta_2 > \theta_1$ respectivamente), supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 > \theta_2$, con esto $\theta_1 - \theta_2 = \phi$, recordar que $\overline{z_2} = \overline{|z_2|e^{i\theta_2}} = |z_2|e^{-i\theta_2}$ luego $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} = |z_1||z_2|e^{i\phi}$. Notemos que el conjugado de $z_1 \cdot \overline{z_2}$ es $\overline{z_1} \cdot z_2$, con esto $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 2Re(|z_1||z_2|e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|Re(e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|\cos\phi$. Notar que como coseno es par, $\cos\phi = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ con lo cual se deduce que sin importar las condiciones de los ángulos se llega al mismo resultado.

(b)

$$
\begin{aligned}
|s|^2 &= |u-v|^2 \\
&= (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u-v)(\overline{u} - \overline{v}) \\
&= u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\
&= u\overline{u} + v\overline{v} - (u\overline{v} + v\overline{u}) \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\phi && \backslash\text{usando la parte (a)}
\end{aligned}
$$

P4 La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ es claro que $|z_1| = |z_1| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_1$.
- Simétrica: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1| \Leftrightarrow z_2 \mathcal{R} z_1$.
- Transitiva: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2$ y $z_2 \mathcal{R} z_3$ se tiene que $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_3$.

Luego la relación es de equivalencia, para la clase de equivalencia de z_0 tenemos que

$$[z_0]_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ z_0 \mathcal{R} z\} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |2 + i\sqrt{5}| = |z|\} = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| = 3\}$$

Dado que $z = x + iy$ esto quiere decir que $|x + iy| = 3$ o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 = 3^2$, esto describe una circunfenrencia de radio 3 centrada en el origen.

P5 Basta demostrar que $z = \overline{z}$

$$\begin{aligned}
|z+i| &= |z-i| \\
|z+i|^2 &= |z-i|^2 \\
(z+i)\overline{(z+i)} &= (z-i)\overline{(z-i)} \\
(z+i)(\overline{z}-i) &= (z-i)(\overline{z}+i) \\
z\overline{z} - zi + i\overline{z} - i^2 &= z\overline{z} + zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - i^2 &= zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - (-1) &= zi - i\overline{z} - (-1) \\
-zi + i\overline{z} + 1 &= zi - i\overline{z} + 1 \\
-zi + i\overline{z} &= zi - i\overline{z} \\
2\overline{z}i &= 2zi \qquad \backslash \cdot 2i \\
-4\overline{z} &= -4z \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

Se concluye que $z \in \mathbb{R}$.

P6

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= [(1-i)(1+i)]^4 \\
&= (1^2 - i^2)^4 \\
&= (1-(-1))^4 \\
&= 2^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)\overline{(1-i)}+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{1^2-i^2+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i} \qquad \backslash \cdot \frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{(i-1)(2-i)}{2^2-i^2}\\
&= 1+i+\frac{2i-i^2-2+i}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i-1}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i}{5}-\frac{1}{5}\\
&= \frac{4}{5}+\frac{8i}{5}
\end{aligned}
$$

P7 (a)

$$
\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\cdot\alpha)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\cdot\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\cdot\alpha)+i\sin(k\cdot\alpha))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\cdot 1^{n-k} \qquad \backslash 1^{n-k}=1\\
&= (e^{i\alpha}+1)^n\\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha+1)^n
\end{aligned}
$$

(b) Usando la indicación se tiene que

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^n &= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1)^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1 - \sin^2(\alpha/2))^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2))^n \\
&= (2\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2))^n \\
&= [2\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))]^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{i\alpha/2})^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{in\cdot\alpha/2}) \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(n\cdot\alpha/2) + i\sin(n\cdot\alpha/2)) \\
S + iS' &= 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2) + i2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)
\end{aligned}$$

Recordemos que esta expresión es equivalente con $S + iS'$, luego igualando partes real e imaginaria con sus respectivos términos se tiene que $S = 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2)$ y $S' = 2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)$.

P8 Primero podemos expresar como sumatoria ambas expresiones

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} = S$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} = S'$$

Procedemos a sumar $S+iS'$, esto nos entrega

$$\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} + 1 - 1 \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} - 1 \qquad \backslash\text{incorporando primer término a la sumatoria} \\
&= \frac{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \qquad \backslash\text{geométrica} \\
&= \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \\
&= \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \\
S+iS' &= -1
\end{aligned}$$

Ahora si igualamos partes real e imaginaria se tiene que $S' = 0$ (el resultado no tiene componente imaginaria) y $S = -1$, tal cual queríamos demostrar.

P9 **(a)** Como z es raź n-ésima quiere decir que $z^n = 1$, si n es divisor de m, entonces $m = n \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $z^m = z^{n\cdot k} = (z^n)^k = (1)^k = 1$, con lo que se concluye que z es raíz m-ésima de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in U$ esto quiere decir que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $z_1^{n_1} = 1$ y $z_2^{n_2} = 1$, hay que demostrar que $z_1 \cdot z_2^{-1} \in U$, es decir, encontrar un $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tal que $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = 1$, en efecto, tomando $n = n_1 \cdot n_2$ se tiene que $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = (z_1 \cdot \frac{1}{z_2})^{n_1 \cdot n_2} = \frac{z_1^{n_1 \cdot n_2}}{z_2^{n_1 \cdot n_2}} = \frac{(z_1^{n_1})^{n_2}}{(z_2^{n_2})^{n_1}} = \frac{1^{n_2}}{1^{n_1}} = 1$. Se concluye que $(U, \cdot)$ es subgrupo de $(S, \cdot)$.