MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño
Profesora: Leonardo Sánchez
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón y Colaboración Marcelito Navarro
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 13:Complejos

Ya no hay días buenos o malos, solo hay matraca

01.- Números Complejos

[**Formalidad**]: Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, de manera que se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ para $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

[**Unidad Imaginaria**]: Se define $i = (0, 1)$

[**Forma cartesiana**]: La expresión $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ es la forma cartesiana de $z = (a, b)$.
Ademas se define:

- $Re(z) = a$ (Parte real)
- $Im(z) = b$ (Parte imaginaria)

[**Coordenadas Polares**]: Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define el par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:

- r es la distancia de z al origen, se llama modulo de z y se anota $r = |z|$.
- θ es el angulo que se forma entre el eje X (real) y el segmento que une el origen con z. Se llama argumento (principal) de z y se anota $arg(z)$.

[**Forma polar**]: Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La expresión $|z|e^{iarg(z)}$ es la forma polar de z.

[**Props varias**]:

I) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$

II) $|zw| = |z| \cdot |w|$

III) $arg(zw) \equiv arg(z) + arg(w)\ (mod\ 2\pi)$

IV) $|z^k| = |z|^k$

V) $(e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$

[**Conjugado**]: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define $\overline{z} = a - bi$

[**Función Conjugado**]: La conjugación es un automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, es autoinversa y restringida a $\mathbb{R}$ es la identidad.

[**Desigualdad triangular**]: Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

[**Raices**: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz $n-$esima de w si $z^n = w$.

[**Soluciones**]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, si $w = re^{i\theta}$ (forma polar) entonces la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones, dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$$

[**Prop**]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, entonces la suma de las raíces n-ésimas vale 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

[**Muchas propiedades**]: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

a) $\overline{\overline{z}} = z$.
b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.
d) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
f) $Re(z) = Re(\overline{z})$ y $Im(z) = -Im(\overline{z})$.
g) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
h) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-iarg(z)}$
i) $|z| = |\overline{z}|$
j) $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$
k) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
l) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
m) Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

P1. MÓDULO COMÚN:

a) Demuestre que las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6 = 62.$$

P2. a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, (1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

b) Encuentre los valores $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}.$$

P3. a) Sean $n \geq 2$ un natural, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un complejo dado, y $\{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcular:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

b) Sean z_1, z_2 las soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\},\quad \frac{((\theta) + z_1 - 1)^n - ((\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \operatorname{sen}(n\theta)(\csc(\theta))^n,$$

donde (θ) y $\csc(\theta)$ son, respectivamente, la cotangente y la cosecante de θ.

P4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios, y $u, v \in \mathbb{C}$, tales que:

$$z_1 + z_2 = -u,$$
$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

c) Muestre que $u = \overline{u} \cdot v$.

d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

P5. Para $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, denotemos por U_k el conjunto de las raíces k-ésimas de la unidad. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq 1$, y sea S el conjunto de soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z^m = \overline{z}^{\,n}$. Muestre que:

a) Si $m \neq n$, $S = U_{m+n} \cup \{0\}$.

b) Si $m = n$, $S = [0, \infty) \cdot U_{2m}$, donde $[0, \infty) \cdot U_{2m} = \{\, r \cdot \omega \mid r \in [0, \infty) \wedge \omega \in U_{2m} \,\}$.

P6. **[Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]**

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P7. Calcular los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $q(x) = x^2 + 2x + 1$.

P8. Suponemos que $P \in \mathbb{R}[x], gr(P) \geq 4, a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Se sabe que

i) $P(x) = Q_1(x)(x^2 - b^2) + cx$

ii) $P(x) = Q_2(x)(x^2 - b^2)(x - a) + R(x)$, con R mónico.

Encuentre $R(x)$.

P9. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determina todas las raíces de la ecuación.

P10. Sea $P(x)$ un polinomio que tiene resto A cuando se lo divide por $(x - a)$ y tiene resto B cuando se lo divide por $(x - b)$. Encuentre el resto $R(x)$ cuando el polinomio es dividido por $(x - a)(x - b)$. Suponga que $a \neq b$.

P11. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $R(x)$ tal que

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R(x).$$

Si $R(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $P(x)$, calcule a, b, c.

P12. Si $n = 3k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$, probar que $x^{2n} + 1 + (x + 1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

Ejericios Resueltos y parte Pauta

Complejos

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$ *b)* $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$ *c)* $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib}+\frac{2}{a-ib}=1+i$$

P3. *a)* Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>1 \ \wedge \ (z)>0$. Demuestre que

$$(z+\frac{1}{z})>0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2+|z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3+(1+w^2)^9+(1+w^3)^6=62$$

P7. Calcule $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1+w_1w_2+\ldots+w_{n-2}w_{n-1}+w_{n-1}w_0=0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$:

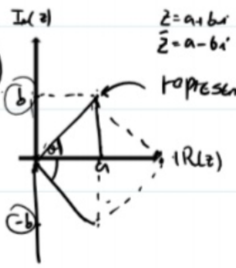
$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k=0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n=n(z^n+1)$$

Solución Extra propuesto

a)



$z = a+bi$
$\bar{z} = a-bi$

representación complejo

$P(x)$

* Raices cúbicas de la unidad

$$X^3 = 1 \Rightarrow X^3 - 1^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$$
$$\boxed{X_1 = 1} \; ; \; X_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$$
$$\boxed{X_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

~~$X_1 = 1$~~
$X_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ✓
$X_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ✓

teniendo esto verifiquemos que z^2+z+1 tiene estas soluciones

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \;\wedge\; z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ //
$z_1 \in \mathbb{C} \;\wedge\; z_2 \in \mathbb{C}$ //

b) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$
$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \in \mathbb{C}$

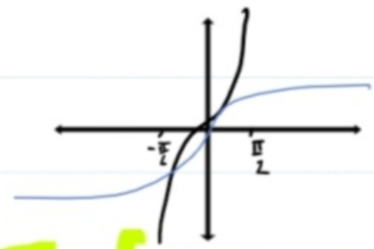
Recordemos! ¿Qué relación hay, Polar y cartesiana?

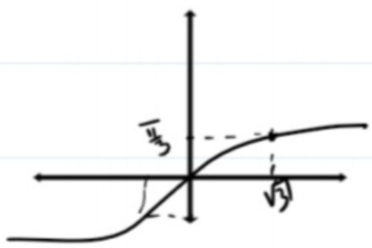
$z = a - bi$ (cartesiana) | $z = Re^{i\theta}$

$R^2 = a^2 + b^2$
$R = \sqrt{a^2+b^2}$

$tg(x)$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a<0,\ b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a<0,\ b<0 \end{cases}$$





$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Sabemos

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \pi = \arctan(\sqrt{3}) - \pi$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = \frac{-2\pi}{3} //$$

$$R = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = 1 //$$

$$\boxed{z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1\cdot e^{-\frac{2\pi}{3} i}} //$$

$$z_2 = \underset{<0}{-\frac{1}{2}} + \underset{>0}{\frac{\sqrt{3}}{2}} i$$
$$R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

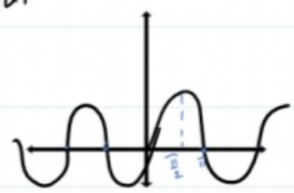
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi =$$
$$= \arctan(-\sqrt{3}) + \pi$$
$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi\cdot 3}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

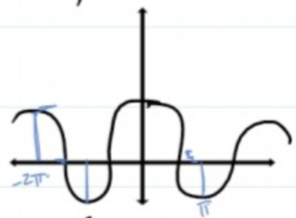
$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1\cdot e^{\frac{2\pi}{3} i}}$$

Veremos $z_1 \wedge z_2$ $(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + \underbrace{(1+z^3)^{6}} = 62$ | $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

z_1 | $z_1^3 = \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^3 = e^{-\frac{2\pi}{3}\cdot 3} = e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)$

$\sin(\alpha)$ $= 1^3 = 1$ $\qquad \overset{=}{\cos(\alpha)}$ 1 $\quad 0$





$1 + z_1^3 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1+z_1^3)^6 = 64$ //

$(1+z_1)^3$, $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow 1 + z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\theta_{1+z_1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$ → Primer caso pues $a > 0$

$f(x) = f(-x) \qquad f(x) = -f(x)$

$\theta_{1+z_1} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 + z_1 = e^{-\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$1 + z_1 = \left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^3 = e^{-\frac{\pi}{3}\cdot 3i} = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$

$= \cos(\pi) - i\sin(\pi)$ $\;0$

$= -1$

$= (1+z_1)^3 = -1$ //

$(1+z_1^2)^{9}$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$z_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $R = 1$

$\Rightarrow (1 + z_1^2) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^9$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad = e^{3\pi i}$

$(1+z_1^2)^9 = -1$ $\quad$ # $e^{3\pi i} = \cos(3\pi) + i\,\cancel{\sin(3\pi)}^{\,0}$

$= -1$

$\Rightarrow \left(e^{3\pi i}\right)^9 = (-1)^9 = -1$ //

listo!

Como probe $z = \bar{z}$

$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ //

Ejericios Resueltos y parte Pauta

Complejos

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$ *b)* $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$ *c)* $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib}+\frac{2}{a-ib}=1+i$$

P3. *a)* Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>1 \ \wedge \ (z)>0$. Demuestre que

$$(z+\frac{1}{z})>0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2+|z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3+(1+w^2)^9+(1+w^3)^6=62$$

P7. Calcule $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1+w_1w_2+\ldots+w_{n-2}w_{n-1}+w_{n-1}w_0=0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k=0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n=n(z^n+1)$$

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$ *b)* $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$ *c)* $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

Para el primero tenemos que:

$$\begin{aligned}(1-i)^4(1+i)^4 &= ((1-i)(1+i))^4\\ &= (1^2-i^2)^4\\ &= 2^4\\ &= 16\end{aligned}$$

Mientras que para el tercero:

$$\begin{aligned}1+i+\frac{i-1}{|i-1|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(i-1)\overline{(i-1)}+i}\\ &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i}\\ &= (1+i)\frac{2+i}{2+i}+\frac{i-1}{2+i}\\ &= \frac{1+3i+i-1}{2+i}\\ &= 4i(2+i)^{-1}\\ &= 4i\frac{\overline{(2+i)}}{|2+i|^2}\\ &= 4i\frac{(2-i)}{5}\\ &= \frac{4}{5}+\frac{8}{5}i\end{aligned}$$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1 + i$$

P3. *a*) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1 \ \wedge \ (z) > 0$. Demuestre que

$$(z + \frac{1}{z}) > 0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Buscamos las raíces cuartas de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Pasandolo a forma polar tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que las soluciones son de la forma $\sqrt[n]{R}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k \in \{0,1,2,3\}$. En nuestro caso quedan $\sqrt[4]{1}e^{i\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})}$. Luego:

$$z_1 = e^{i\pi/6} \quad z_2 = e^{i(\pi/6+\pi/2)} \quad z_3 = e^{i(\pi/6+\pi)} \quad z_4 = e^{i(\pi/6+3\pi/2)}$$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1 Notemos que si:

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x^3 + x^2 + x = 0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2 + x + 1 = x^3 + x^2 + x \implies x^3 = 1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2 + 1 + 1 = 0 \implies 3 = 0$$

Lo que sería una contradicción.

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

P7. Calcule $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

Recordando que la suma de las raíces quintas da 0, tenemos:

$$1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 0$$

Tomando parte real, concluimos que:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(6\pi/5) + \cos(8\pi/5) &= 0 \\ 1 + \cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(4\pi/5) + \cos(2\pi/5) &= 0 \\ 1 + 2\cos(2\pi/5) + 2\cos(4\pi/5) &= 0 \end{aligned}$$

Ocupando la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$ tenemos que:

$$4\cos(2\pi/5)^2 + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática tenemos que:

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Recordando que $\cos(2\pi/5) \geq 0$, tenemos que $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}3$.

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n = n(z^n + 1)$$

Recordemos primero que para todo k:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Tiene sentido entonces notar que $w_0 = w_n$, $w_1 = w_{n+1}$, $w_2 = w_{n+2}$, etc.... Veamos además que:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = (w_1)^k$$

a) Calculemos:

$$\begin{aligned}
w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 &= w_0w_1 + w_1w_2 + \ldots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} w_k w_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (w_1)^k (w_1)^{k+1} \\
&= w_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (w_1^2)^k}_{\text{Geométrica}} \\
&= w_1 \frac{(w_1^2)^n - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{(w_1^n)^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{1^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Similar a lo hecho en la parte *a*):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k &= \sum_{j=0}^{n-1}(w_1^j)^k \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^k)^j}_{\text{Geométrica}} \\
&= \frac{(w_1^k)^n-1}{w_1^k-1} \\
&= \frac{(w_1^n)^k-1}{w_1^k-1} \\
&= \frac{1^k-1}{w_1^k-1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c) La idea de esta parte es recordar que el Teorema del Binomio funciona para elementos de $\mathbb{C}$ (de hecho el Teorema del Binomio nos da algo más potente aún, una igualdad de polinomios):

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n &= \sum_{j=0}^{n-1}(z+w_1^j)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{k}w_1^{jk}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= \left(\binom{n}{0}z^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k}+\binom{n}{n}z^0\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{jk}\right) \\
&= z^n\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}w_1^{j\cdot 0}\right)}_{\text{Suma de 1's}}+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}z^{n-k}\right)\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k\right)}_{=0\text{ por }b)}+1\underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1}(w_1^n)^j\right)}_{\text{Suma de 1's}} \\
&= z^n n+n \\
&= n(z^n+1)
\end{aligned}
$$

P1. [Igualdad por coordenada]

Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (2+f)+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7 \\
q(x) &= 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5
\end{aligned}
$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

P2. [Propiedad Importante]

Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

P3. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

c) Se sabe que el polinomio

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$$

admite una raiz real a (es decir, $a \in \mathbb{R}$). Determine todas las raices de $p(z)$

P4. [Encontrar un polinomio]

Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$ y que los restos de sus divisones por $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P5. [Correspondencia en Polinomios]

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x - a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

P1. [Igualdad por coordenada]

Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f)+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7 \\ q(x) &= 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

Recordando que dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, vemos que:

$$\begin{aligned} 2+f &= 3 \\ e+f &= f+2 \\ 0 &= a+b+c+d \\ a-d &= b+c+1 \\ 2a+c &= b \\ a+b &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos 6 incógnitas y 6 ecuaciones, resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{3}{2} \quad d = -\frac{3}{2} \quad e = 2 \quad f = 1$$

Por tanto el polinomio resultante es:

$$p(x) = q(x) = 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5$$

P2. [Propiedad Importante]

Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo. Notemos que como i es raíz entonces $\bar{i} = -i$ también lo es. Por ende el polinomio tiene por lo menos 5 raices $(i, -i, 1, 2, 3)$ y por tanto el grado de p debe ser mayor a 5. Como el polinomio debe tener lo anterior como raíces, tenemos que:

$$p(x) = (x - i)(x + i)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6$$

Satisface lo pedido.

P3. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

c) Se sabe que el polinomio

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$$

admite una raiz real a (es decir, $a \in \mathbb{R}$). Determine todas las raices de $p(z)$

a) Por el teorema de la raíz racional sabemos que si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es una raíz entonces $a| - 15$ y $b|1$, luego las posibles raíces racionales son:

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Veamos si encontramos alguna:

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 12(1)^2 - 13(1) - 15 = -36 \\ p(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 12(-1)^2 - 13(-1) - 15 = -16 \\ p(3) &= (3)^4 + 3(3)^3 - 12(3)^2 - 13(3) - 15 = 0 \end{aligned}$$

Es decir 3 es raíz, luego $(x - 3)|p(x)$. Dividiendo polinomios:

$$[style = C, div =:]x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15x - 3$$

Nuevamente por el teorema de la raíz racional las raíces racionales del polinomio resultante $x^3 + 6x^2 + 6x + 5$, pueden ser:

$$\{\pm 1, \pm 5\}$$

Además sabemos que ± 1 no pueden ser raíces pues ya las probamos y no eran raices de p, probemos las que faltan:

$$\begin{aligned} q(5) &= (5)^3 + 6(5)^2 + 6(5) + 5 = 310 \\ q(-5) &= (-5)^3 + 6(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Es decir -5 es raíz, dividiendo polinomios:

$$[style = C, div =:]x^3 + 6x^2 + 6x + 5x + 5$$

Para factorizar el polinomio resultante $x^2 + x + 1$, ocuparemos la formula cuadrática, de donde obtenemos que:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Estamos listos para entregar la factorización de nuestro polinomio original. En $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x - 3)(x + 5)(x^2 + x + 1)$$

y en $\mathbb{C}$:

$$p(x) = (x - 3)(x + 5)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

b) Notemos que hay 7 raices en total (pueden repetirse, es decir, pueden tener multiplicidad). Notar además que si i es raíz de multiplicidad 2, entonces $(x-i)(x-i)$ divide a p y como $p \in \mathbb{R}[x]$ se tiene que el conjugado de estas raices tambien son raices. Entonces como i es raiz doble (es decir, de multiplicidad 2) se tendrá que $\bar{i} = -i$ es raiz doble tambien. Por lo que tenemos 4 raices, faltan 3, para esto notemos que el polinomio $(x-i)(x-i)(x+i)(x+i) = (x^2+1)(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$ divide a $p(x)$. Entonces

$$[style = C, div =:]x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \qquad x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) \cdot (x^3 - 1)$$

Por lo que las raices que faltan son las raices de $(x^3 - 1)$. De donde planteamos la igualdad

$$x^3 - 1 = 0 \iff x^3 = 1$$

Dado lo anterior, x debe ser una raiz cubica de la unidad, es decir, $e^{\frac{2k\pi}{3}}$ con $k \in \{0, 1, 2\}$.
Finalmente
$\Rightarrow \qquad x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) \cdot (x-1)(x - e^{\frac{2\pi}{3}})(x - e^{\frac{4\pi}{3}})$
Por lo que la descomposición en los complejos es

$$p(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x-1)(x - e^{\frac{2\pi}{3}})(x - e^{\frac{4\pi}{3}})$$

y en los reales es

$$p(x) = (x^2+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$$

c) Como a es raiz real, se tiene que $p(a) = 0$, es decir,

$$p(a) = 2a^3 - (5+6i)a^2 + 9ia - 3i + 1 = 0$$

Notar que aca no podemos usar el teorema de la raiz racional. Sin embargo, como $a \in \mathbb{R}$ sabemos que $(a) = a$ y $(a) = 0$. Entonces tomando parte real en la igualdad anterior se tiene que

$$2a^3 - 5a^2 + 1 = 0$$

Donde aqui si podemos usar el teorema de la raiz racional, obteniendo que $a = \dfrac{1}{2}$.
Entonces volviendo al polinomio del enunciado, si evaluamos $p(\frac{1}{2})$ obtenemos lo siguiente

$$p(\frac{1}{2}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - (5+6i)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9i\left(\frac{1}{2}\right) - 3i + 1 = 0$$

Por lo que podemos hacer división sintetica o división de polinomios para seguir calculando las raices
Entonces procedemos por división sintetica

2	-5-6i	9i	-3i+1	1/2
	1	-2-3i	-1+3i	
2	-4-6i	-2+6i	0	

Donde en la columna 2, el número 1 se calculo a partir de $2 * \frac{1}{2}$. En la columna 3, el valor de $-2-3i = (-4-6i)\frac{1}{2}$ y en la columna 4, el valor $-1+3i = (-2+6i)\frac{1}{2}$.
Finalmente $p(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i + 1 = (z - \frac{1}{2})(2z^2 + (-4-6i)z + (-2+6i))$
Por lo que falta encontrar las raices del polinomio $2z^2 + (-4-6i)z + (-2+6i)$ en donde usando la ecuación cuadratica podemos concluir que $z = 1+2i$ y $z = 1+i$
En conclusión, las raices son $\frac{1}{2}, 1+2i$ y $1+i$

P4. [Encontrar un polinomio]

Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

Notemos que como $(x-1)|p(x)$:

$$p(x) = (x-1)q(x)$$

Donde como p es mónico $q(x) = x^2 + bx + c$. Luego:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

Utilizando el teorema del resto, tenemos que $p(2) = p(3) = p(4)$. O de manera equivalente:

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(3) \\ p(3) & = & p(4) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4 + 2b + c & = & 2(9 + 3b + c) \\ 2(9 + 3b + c) & = & 3(16 + 4b + c) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4b + c & = & -14 \\ 6b + c & = & -30 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $b = -8$ y $c = 18$. Por tanto:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$$

Nos falta encontrar las raíces. Es claro que $x_1 = 1$ es una raíz, para encontrar las otras usaremos la fórmula para la cuadrática sobre $x^2 - 8x + 18$, de donde tenemos que:

$$x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 18}}{2} \implies x_2 = 4 + i\sqrt{2}, \quad x_3 = 4 - i\sqrt{2}$$

P5. [Correspondencia en Polinomios]

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x-a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

a)

- $(\implies)$

  Probaremos la contrarreciproca, es decir:

  $$(p) < 1 \implies p(x) \text{ no es sobreyectiva}$$

  Si $(p) < 1$, entonces $p(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Tomemos entonces $a \neq c$, luego $\forall x \in \mathbb{C}$

  $$p(x) = c \neq a$$

  De donde vemos que p no es sobreyectivo.

- $(\impliedby)$

  Sea $b \in \mathbb{C}$, queremos encontrar $a \in \mathbb{C}$ tal que $p(a) = b$. Definamos entonces el siguiente polinomio:

  $$f(x) = p(x) - b$$

  Como $(p) \geq 1$, entonces $(f) \geq 1$. Por el teorema fundamental del álgebra existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Luego:

  $$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ p(x_0) - b &= 0 \\ p(x_0) &= b \end{aligned}$$

  Tomando $a = x_0$ concluimos.

b) (i) Si $(p) = 1$, entonces $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. Sean $x, y \in \mathbb{C}$, tales que $p(x) = p(y)$, luego:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y) \\ ax + b &= ay + b \\ ax &= ay \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto $p(x)$ es inyectiva.

(ii) Si $(p) < 1$, entonces $p(x) = a$. Luego $0 \neq 1$, pero $p(0) = p(1)$, es decir $p(x)$ no es inyectiva.

(iii) Como $n > 1$, sea w_0 y w_1 dos raíces n-ésimas de la unidad tal que $w_0 \neq w_1$. Definamos $u_0 = w_0 + a$ y $u_1 = w_1 + a$, es claro que $u_0 \neq u_1$, pero:

$$\begin{aligned} q(u_0) &= \lambda(u_0 - a)^n = \lambda(w_0 + a - a)^n = \lambda(w_0)^n = \lambda \\ q(u_1) &= \lambda(u_1 - a)^n = \lambda(w_1 + a - a)^n = \lambda(w_1)^n = \lambda \end{aligned}$$

Es decir $q(u_0) = q(u_1)$ y por tanto $q(x)$ no es inyectiva.

(iv) Recapitulando. En la parte (i) probamos que:

$$(p) = 1 \implies p(x) \text{ es inyectivo}$$

Nos falta probar la reciproca. Por contrarreciproca probaremos que:

$$(p) \neq 1 \implies p(x) \text{ no es inyectivo}$$

Como el $(p) \neq 1$, tenemos que $(p) < 1$ o $(p) > 1$. Si $(p) < 1$, de donde concluiríamos por la parte (ii). Asumamos entonces que $(p) > 1$, tenemos dos casos:

- **Caso 1:** (p tiene solamente una raíz)
  Si p tiene solo una raíz, llamémosla $a \in \mathbb{C}$, entonces p es de la forma:

  $$p(x) = \lambda(x - a)^n$$

  De donde por la parte (iii), tenemos que $p(x)$ no es inyectiva.
- **Caso 2:** (p tiene al menos dos raíces)
  Si p tiene al menos dos raíces, llamemoslas $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces $p(a) = p(b) = 0$, de donde concluimos que $p(x)$ no es inyectiva.

Como de cualquier manera $p(x)$ no es inyectiva, concluimos.